Předáno Dr. Pichovi v (?) 1967.

Petr Vaníček :

O jedné přibližné metodě anharmonické analýzy.

(Petitem:)

Při řešení některých problémů v geofysice, astronomii a jiných odvětvích experimentální fysiky se často setkáváme s problémem nahradit empirickou (nebo jinou) funkci danou tabulkou obecným trigonometrickým polynomem, který se k ní "co nejlépe přibližuje". Nalezení takového polynomu nazýváme anharmonickou analýzou dané funkce, na rozdíl od harmonické analýzy, jejímž úkolem je nalézt trigonometrický polynom (polynom s harmonickými složkami neboli celočíselnými frekvencemi) nejlépe se přibližující dané funkci. Zatímco harmonická analýza je metodou běžně používanou, jejíž teorie je dostatečně známa, anharmonická analýza představuje daleko obtížnější problém. V předkládaném příspěvku jsem se pokusil nejprve pokud možno přesně definovat úlohu anharmonické analýzy a dále podat návrh přibližné metody k jejímu řešení. Poslední paragraf je věnován ilustrativnímu příkladu aplikace metody v geofysice.

I. Matematická formulace problému anharmonické analýzy.

§ 1) Základní pojmy.

Množinu reálných čísel budeme značit E_1, množinu racionálních čísel $\mathcal{R}$. Kartézskou n-tou mocninu libovolné množiny budeme značit dolním indexem n , nebude-li řečeno jinak. Množiny E_1 a $\mathcal{R}$ budeme předpokládat uspořádány relací $>$.

Definice 1: Nechť m je pevné přirozené číslo větší než 0. Nechť r_j, ω_j, φ_j pro $j=0,1,\dots,m-1$ jsou pevná reálná čísla. Pak reálnou funkci T reálného argumentu t , jejíž funkční hodnoty jsou dány výrazem:

$$T(t) = \sum_{j=0}^{m-1} r_j \cos(\omega_j t - \varphi_j), \quad t \in E_1 \qquad (1)$$

budeme nazývat zobecněným (nebo obecným) trigonometrickým polynomem.

Označíme-li funkční hodnoty $r_j \cos(\omega_j t - \varphi_j)$ sčítanců výrazu (1) pro $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ symboly $\alpha_j(t)$, můžeme psát výraz (1) rovněž ve tvaru:

$$T(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j(t), \quad t \in E_1. \tag{1'}$$

Pro $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ budeme reálnou funkci " α_j" nazývat <u>j-tou složkou</u> zobecněného trigonometrického polynomu T, "r_j" <u>amplitudou</u> složky α_j, " φ_j" <u>fázovým posunem</u> složky α_j a "ω_j" její <u>frekvencí</u>. r_j a φ_j budeme souborně nazývat <u>parametry</u> složky α_j.

Reálná čísla a_j, b_j související s parametry r_j, φ_j vztahy:

$$a_j = r_j \cos \omega_j \,, \qquad b_j = r_j \sin \omega_j \tag{2}$$

budeme nazývat <u>koeficienty</u> složky α_j. Platí:

<u>Lemma 1:</u> Nechť $a_j, b_j \in E_1$ jsou koeficienty složky α_j a nechť parametry r_j, φ_j vyhovují vztahům:

$$r_j = \sqrt{(a_j^2 + b_j^2)}, \quad \varphi_j = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b_j/a_j) & \text{pro } a_j > 0 \\ \pi/2 & \text{pro } a_j = 0, b_j \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{pro } a_j = 0, b_j < 0 \\ \operatorname{arctg}(b_j/a_j) + \pi & \text{pro } a_j < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Pak platí:

$$\alpha_j(t) = r_j \cos(\omega_j t - \varphi_j) = a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t, \quad t \in E_1. \tag{4}$$

O tvrzení této lemmy se lze přesvědčit kupř. dosazením (2) nebo (3) do (4), což zde nebudeme provádět (viz kupř. [7], 1, vzorce (6), (7)). Je zřejmé, že pro $a_j, b_j \in E_1$, $r_j \in E_1^+$, $\varphi_j \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) = \mathcal{D}$, jsou vztahy (2) a (3) (vzájemně) inversní.

Z fysikálního hlediska nás budou zajímat pouze takové trigonometrické polynomy T, jejichž frekvence ω_j, $j = 0, 1, \dots m-1$ budou racionální čísla z uzavřeného intervalu $\mathcal{E}$*), daného svými hranicemi ν_1, ν_2 splňujícími nerovnost: $0 < \nu_1 < \nu_2$.

---

*) Interval $\mathcal{E}$ je zvykem nazývat <u>frekvenční rozsah</u>.

Kromě toho budeme požadovat, aby $\omega_o = 0$. Pro $\omega_o = 0$, dostaneme z (4): $\alpha_o(t) = a_o = r_o \cancel{\cos \varphi_o}$, $t \in E_1$ a výraz (1) můžeme zapsat kupř. takto:

$$T(t) = a_o + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t), \quad t \in E_1. \qquad (1'')$$

Definujme si nyní třídu obecných trigonometrických polynomů, které nás budou dále zajímat.

<u>Definice 2:</u> Nechť m je pevné přirozené číslo větší než jedna a ν_1, ν_2 $(\nu_1 < \nu_2)$ jsou dvě pevná, kladná, racionální čísla. Nechť $\omega_o = 0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}$ jsou racionální čísla z intervalu $\mathcal{E} = \langle \nu_1, \nu_2 \rangle$, $r_j \in E_1^+$ a $\varphi_j \in \mathcal{D} = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ pro $j=0,1,\ldots,m-1$. Pak množinu všech zobrazení T, jejichž funkční hodnoty jsou dány vztahem (1) nazývejme <u>třída $\mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$</u> (obecných trigonometrických polynomů).

Třída $\mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$ je tedy jednoznačně určena volbou $m, \mathcal{E}$ hovících podmínkám definice 2. Budeme mluvit o "polynomu T ze třídy $\mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$" nebo tvrdit, že jistý "polynom T patří do třídy $\mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$" a tuto skutečnost značit symbolem "$T \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$". Definice 2 ovšem nevylučuje, že amplitudy některých (nebo všech) složek polynomu $T \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$ mohou být ~~ne~~nulové; číslo m určuje tak maximální možný počet nenulových amplitud polynomu T. Je-li tedy $T \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$, pak je i $T \in \mathcal{T}_{\mu,\mathcal{E}}$, $\mu \geq m$.

Vymezme si dále třídy všech množin argumentů t s nimiž hodláme pracovat.

<u>Definice 3.</u> Nechť je dáno jisté pevné přirozené číslo $n > 0$. Pak budeme říkat, že každá množina $\mathcal{M} \in E_n$, ekvivalentní množině $\{1,2,\ldots,n\}$, patří do <u>třídy $\mathcal{A}_n$</u>;

(o pojmu ekvivalence množin viz kupř. [3], 64).

Z definice plynou tyto důsledky: $\mathcal{A}_n \subset E_n$; všech n čísel $t \in \mathcal{M} \in \mathcal{A}_n$ je vzájemně různých. Jestliže $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_n$, pak $\mathcal{M}$ je konečná, neprázdná podmnožina E_1. Jelikož $\mathcal{M} \subset E_1$ a E_1 předpokládáme uspořádánu relací $>$, jest i $\mathcal{M}$ uspořádanou množinou. Očíslujeme-li tedy prvky $t \in \mathcal{M}$ čísly $1,2,\ldots,n$, platí: $t_i < t_{i+1}$, $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Dále si vymezíme množinu všech zobrazení, která nás budou zajímat:

__Definice 4__. Nechť je dána jistá pevná množina $\mathfrak{M} \in \mathcal{A}_n$. Pak množinu všech zobrazení $\mathfrak{M}$ do E_1 budeme nazývat $\underline{\mathcal{G}_m}$.

Každé zobrazení $G \in \mathcal{G}_m$ je tedy reálnou funkcí reálného argumentu, definovanou pro všechna $t \in \mathfrak{M} \in \mathcal{A}_n$.

Dále budeme předpokládat, že na množině $\mathcal{G}_m$ je obvyklým způsobem definováno sčítání a násobení prvků a násobení prvků reálnými čísly. Pak $\mathcal{G}_m$ je __lineárním prostorem__ a můžeme mluvit o __lineárních kombinacích__, __lineární nezávislosti__ a __závislosti__ prvků z $\mathcal{G}_m$ (viz kupř. [10], II, § 1).

Je známo, že takovýto prostor můžeme metrizovat. Zvolme speciálně Euklidovskou metriku (viz kupř. [2] Úvod, §2; [6], §§ 3,4; [9] § 1,10; [10] 1,2; [17],1.2). To znamená, že každé dvojici prvků $G,H \in \mathcal{G}_m$ přiřadíme vztahem:

$$\varrho(G,H) = \sqrt{\sum_{t \in \mathfrak{M}} (G(t) - H(t))^2} \in E_1^+ \tag{5}$$

nezáporné reálné číslo $\varrho(G,H)$, které nazveme __vzdáleností__ prvků G a H. Množina $\mathcal{G}_m$ s takto zavedenou metrikou je __metrickým prostorem__, specielně Eukleidovským prostorem dimense n nebo jednodušeji __Eukleidovským n-prostorem__.

Měření vzdáleností na $\mathcal{G}_m$ je tedy zprostředkováno funkčními hodnotami $G(t)$, $H(t)$ (pro $t \in \mathfrak{M}$) každého z prvků $G,H \in \mathcal{G}_m$. Zdůrazněme zde skutečnost, že zobrazení($\mathcal{G}_m \times \mathcal{G}_m$ na E_1) definované vztahem (5) dovoluje mluvit o větších a menších vzdálenostech libovolných dvojic prvků z $\mathcal{G}_m$, jelikož E_1^+ uvažujeme uspořádánu (relací $>$). Podobně stojí za zmínku i skutečnost, že naše volba metriky v $\mathcal{G}_m$ (stejně jako kriteria nejlepšího přiblížení - viz dále) byla zcela libovolná. Jediný důvod, který nás vedl právě k této volbě, je poměrně jednoduchý způsob získání výsledků. Je třeba zvlášť zdůraznit, že zde nejde o metodu nejmenších čtverců (v pravděpodobnostním slova smyslu), jejíž použití je diktováno jistým předpokládaným rozložením nahodilých chyb. V našem případě o žádných chybách nebyla a nebude řeč.

Poznamenejme ještě, že libovolný $T \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ jest zobrazením E_1 do E_1. Tudíž existuje zúžení zobrazení T (parciální funkce) definované na množině $\mathfrak{M} \in \mathcal{A}_n$ a toto jest prvkem prostoru $\mathcal{G}_m$. Zúžení zobrazení T nebudeme nikterak specielně označovat.

§ 2) Definice polynomů nejlepšího přiblížení.

V tomto paragrafu budeme definovat polynomy nejlepšího přiblížení k předem dané funkci $F \in \mathcal{G}_m$. Abychom to mohli udělat, dohodněme se nejprve na tom, co budeme rozumět pod pojmem "předem daná funkce $F \in \mathcal{G}_m$". Tento pojem bude pro nás znamenat, že byla dána jistá pevná množina $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_n$ a že známe funkční hodnoty $F(t) \in E_1$, nikoliv všechny rovny konstantě, pro všechna $t \in \mathcal{M}$. Jestliže hodnoty $F(t)$ byly získány nějakým měřením, pak je zvykem mluvit o F jako o empirické funkci dané tabulkou. Vezmeme-li zřejmě nyní předem danou $F \in \mathcal{G}_m$ a jistý $T \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$, má smysl mluvit o vzdálenosti $\varrho(F,T)$ (ve smyslu metriky zavedené vztahem (5)).

Zaveďme si nyní jedno velmi užitečné zobrazení množiny $\mathcal{G}_m \times \mathcal{G}_m$ na množinu E_1, které nám umožní vyjádřit některé další úvahy podstatně jednodušeji.

Definice 5. Nechť G,H jsou dva pevné prvky prostoru $\mathcal{G}_m$. Pak číslo:

$$\sum_{t \in \mathcal{M}} G(t).H(t) \in E_1 \tag{6}$$

budeme nazývat skalárním součinem prvků G a H a značit jej (G,H).

Lze dokázat, že prostor $\mathcal{G}_m$ s takto definovaným skalárním součinem každé dvojice svých prvků splňuje axiomy Hilbertova prostoru dimense n (viz kupř. [10] II, §4; [15] V, 82) a o $\mathcal{G}_m$ můžeme tedy mluvit též jako o Hilbertově n-prostoru. Dvěma prvkům Hilbertova prostoru, jejichž skalární součin je nulový, říkáme (vzájemně) ortogonální *)

V Hilbertově prostoru platí:

Lemma 2: I. Nechť $\phi = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{M-1}\} \subset \mathcal{G}_m$ je systém lineárně nezávislých prvků v $\mathcal{G}_m$. Pak pro daný prvek $F \in \mathcal{G}_m$ existuje mezi všemi polynomy $P_M = \sum_{j=0}^{M-1} c_j \phi_j$, pro $c_0, c_1, \ldots, c_{M-1} \in E_1$ právě jediný polynom

---

*) Úmyslně nebudeme mluvit o pojmech norma, úplnost prostoru apod., které nebudeme nezbytně potřebovat.

$$P'_M = \sum_{j=0}^{M-1} c'_j \phi_j \quad (c'_0, c'_1, \dots, c'_{M-1} \in E_1) \tag{7}$$

takový, pro nějž platí:

$$\varrho(P'_M, F) < \varrho(P_M, F). \tag{8}$$

II. M-tice koeficientů $c'_0, c'_1, \dots, c'_{M-1}$ je řešením soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\sum_{j=0}^{M-1} (\phi_k, \phi_j) c'_j = (\phi_k, F), \quad k=0,1,\dots,M-1. \tag{9}$$

Důkazy těchto tvrzení viz kupř. v [2] 5, §3/1; [6] §4; [9] §1,2. Polynom (7) je zvykem nazývat <u>polynomem nejlepšího přiblížení k F</u> ve smyslu metriky (5) nebo též polynomem nejlepšího středně-kvadratického přiblížení k F. Soustava (9) se nazývá soustavou <u>normálních rovnic</u>.

Abychom mohli zapsat obecný trigonometrický polynom ve stejném tvaru jako jsme zapisovali polynomy P_M, označme:

$$M = 2m-1, \tag{10}$$

$$c_0 = a_0,\ c_1 = a_1,\ c_2 = b_1, \dots, c_{M-2} = a_{m-1}, c_{M-1} = b_{m-1}. \tag{11}$$

Dále uvažujme systém ϕ takových zobrazení $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M-1} \in \in \mathcal{G}_m$, že pro všechna $t \in \mathcal{M}$ bude:

$$\begin{aligned} &\phi_0(t)=1,\ \phi_1(t)=\cos\omega_1 t,\ \phi_2(t)=\sin\omega_1 t, \dots, \\ &\phi_{M-2}(t)=\cos\omega_{m-1} t,\ \phi_{M-1}(t)=\sin\omega_{m-1} t. \end{aligned} \tag{12}$$

Pro racionální $\omega_j \in \mathcal{E}$, reálná c_j $(j=1,2,\dots,m-1)$ a přirozené $M > 0$ platí zřejmě:

$$T = \sum_{j=0}^{M-1} c_j \phi_j \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}. \tag{13}$$

Zaveďme nyní pomocný pojem "obecné trigonometrické polynomy vázaně-nejlepšího přiblížení k F" (ve smyslu metriky (5)), který budeme dále potřebovat.

<u>Definice 6:</u> Nechť je předem dána funkce $F \in \mathcal{G}_m$ a nechť pro pevná $m, \mathcal{E}$, splňující předpoklady definice 2, je dána pevná (m-1)-tice frekvencí $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1} = (\omega)_{m,\mathcal{E}} \in \in \underbrace{\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}}_{(m-1)\text{-krát}} = \mathcal{E}_{m-1} \subset E_{m-1}$.

Pak třídu $\mathcal{T}_\omega^x \subset \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ všech polynomů T_ω^x, které splňují podmínku:

$$\varrho(T_\omega^x, F) \leq \varrho(T_\omega, F) \tag{14}$$

(T_ω jsou všechny polynomy o daných frekvencích $(\omega)_{m,\varepsilon}$) budeme nazývat třídou <u>obecných trigonometrických polynomů vázaně nejlepšího přiblížení k F</u> (ve smyslu metriky (5) pro dané $(\omega)_{m,\varepsilon}$) *).

Koeficienty $c'_0, c'_1, \ldots, c'_{M-1}$ a parametry $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{m-1}$, $\varphi'_0, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{m-1}$ těchto polynomů budeme nazývat <u>vázaně-optimální</u>.

Z lemmy 2 plyne, že $\mathcal{T}^x$ obsahuje buď jeden nebo nekonečně mnoho polynomů T_ω^x. První případ nastane, když pro dané $(\omega)_{m,\varepsilon}$ a $\mathcal{M}$ je systém ϕ (definovaný rovnicemi (12)) lineárně nezávislým v $\mathcal{G}_m$. Druhý případ nastane, je-li systém ϕ v $\mathcal{G}_m$ lineárně závislý. Pak soustava normálních rovnic má nekonečně mnoho řešení $\{c'_0, c'_1, \ldots, c'_{M-1}\}$. Definice 6 vymezuje tedy neprázdnou třídu funkcí a má tudíž smysl.

§ 3) <u>Zúžení úlohy.</u>

Dále budeme chtít definovat třídu obecných trigonometrických polynomů nejlepšího přiblížení, tj. polynomů, které mají od dané $F \in \mathcal{G}_m$ nejmenší vzdálenost (pro něž budeme i frekvence považovat za neznámé). Kdybychom se o řešení této úlohy pokusili v plné obecnosti, tak jak jsme to činili dosud, narazili bychom na značné problémy již v důkazu, že taková třída je vskutku neprázdná. Proto raději zúžíme úlohu tak, abychom se těmto potížím vyhnuli.

Zužme třídu $\mathcal{A}_n$ takto:

<u>Definice 7.</u> Nechť n je přirozené, liché číslo větší než 1. Pak množinu $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_n$ jejíchž n prvků t_i splňuje vztahy:

$$t_i = -\pi + \frac{2\pi}{n-1} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{15}$$

budeme nazývat množinou $\mathcal{M}_n$.

---

*) Slovu "vázaně" je třeba rozumět tak, že jde o vázanost na danou m-tici frekvencí. Slova "obecné trigonometrické" budeme dále obvykle vypouštět, jelikož o jiné polynomy nepůjde.

Volbou přirozeného, lichého čísla $n \geq 3$ je tedy jednoznačně určena nikoliv celá třída $\mathcal{A}_n$ množin $\mathcal{M}$, ale právě jediná množina $\mathcal{M}_n \in \mathcal{A}_n$, n "ekvidistantních" reálných čísel t_i (tj. takových, že platí: $t_i - t_{i-1} = \frac{2\pi}{n-1} =$ konst., $i=1,2,\dots, n-1$), "symetrických vzhledem k nule" (to znamená, že platí: $t_i = -t_{n-1-i}$ pro $i=0,1,\dots,n-1$) se "středním prvkem" $t_{(n-1)/2}$ rovným nule. Třídu $\mathcal{A}_n$ jsme takto zúžili na jedinou množinu. Prostor funkcí definovaných na $\mathcal{M}_n$ budeme značit $\mathcal{G}m_n$.

Nutnou, ale nikoliv postačující podmínkou lineární nezávislosti funkcí systému ϕ (definovaného rovnicemi (12)) a tím i existence jediného polynomu vázaně-nejlepšího přiblížení k F v libovolném bodě $(\omega)_{m,\mathcal{E}}$ je platnost nerovnosti:

$$M \leq n \tag{16}$$

neboli:

$$m \leq \frac{1}{2}(n+1). \tag{16'}$$

$\mathcal{G}m$ (nebo $\mathcal{G}m_n$) je prostor dimense n. Víme (viz kupř. [10] 2, §1), že v prostoru dimense n nelze nalézt více nežli právě n lineárně nezávislých elementů.

Můžeme nyní vyslovit:

<u>Věta 1:</u> Je-li pro první, přirozené, liché $n \geq 3$ přirozené m z množiny $\{2,3,\dots,\frac{1}{2}(n+1)\}$ a uzavřený interval $\mathcal{E} \subset \subset (0, \frac{1}{4}(n-1)) \subset \mathcal{R}$, pak pro libovolnou $(m-1)$-tici vzájemně různých frekvencí $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1} \subset \mathcal{E}$ jest systém ϕ popsaný rovnicemi (12), systémem lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{G}m_n$.

<u>Důkaz:</u> Nutnou a postačující podmínkou, aby systém ϕ byl systémem lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{G}m_n$ je, aby hodnota Grammova determinantu G systému ϕ byla různá od nuly:

$$G = \begin{vmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) & \dots & (\phi_0, \phi_{M-1}) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) & \dots & (\phi_1, \phi_{M-1}) \\ \vdots & & & \\ (\phi_{M-1}, \phi_0) & (\phi_{M-1}, \phi_1) & \dots & (\phi_{M-1}, \phi_{M-1}) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

(viz kupř. [9], § 1.10).

Důkaz rozdělíme na 3 části:

a) dokážeme, že každá funkce podsystému $\phi^{\ell} = \{\phi_2, \phi_4, \phi_6, \dots, \phi_{M-1}\}$ je ortogonální ke všem funkcím podsystému $\phi^{s} = \{\phi_0, \phi_1, \phi_3, \phi_5, \dots, \phi_{M-2}\}$ neboli, že podsystémy ϕ^{ℓ} a ϕ^{s} jsou vzájemně ortogonální. Díky našemu výběru $\mathcal{M}_n$ jsou funkce systému ϕ^{ℓ} liché a funkce systému ϕ^{s} sudé. Můžeme tedy psát obecně, je-li ϕ_s sudá funkce a ϕ_{ℓ} lichá funkce:

$$(\phi_s, \phi_{\ell}) = \sum_{t \in \mathcal{M}_n} \phi_s(t) \cdot \phi_{\ell}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_s(t_i) \cdot \phi_{\ell}(t_i) =$$
$$= 2 \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-3)} \phi_s(t_i)\,(\phi_{\ell}(t_i) - \phi_{\ell}(t_i)) + \phi_s(t_{\frac{1}{2}(n-1)}) \cdot \phi(t_{\frac{1}{2}(n-1)}) =$$
$$= \phi_s(t_{\frac{1}{2}(n-1)}) \cdot \phi_{\ell}(t_{\frac{1}{2}(n-1)}) .$$

Jelikož $t_{\frac{1}{2}(n-1)} \in \mathcal{M}_n$ je rovno nule, pak zřejmě $\phi_{\ell}(t_{\frac{1}{2}(n-1)}) = 0$ a $(\phi_s, \phi_{\ell}) = 0$, což se mělo dokázati.

b) Dokážeme, že nutnou a postačující podmínkou, aby systém ϕ byl systémem lineárně nezávislých funkcí je, aby funkce každého z podsystémů $\phi^{s}, \phi^{\ell} \subset \phi$ byly lineárně nezávislé v $\mathcal{G}_{\mathcal{M}_n}$. Přeskupme v G řádky a sloupce tak, aby v levé horní části byly pouze skalární součiny sudých funkcí a v pravé dolní části pouze skalární součiny lichých funkcí (počet přeskupení bude vždy sudý a znaménko G se nezmění). Uvážíme-li ortogonálnost podsystémů ϕ^{s} a ϕ^{ℓ} dostáváme:

$$G = \begin{vmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & (\phi_0,\phi_3) & \dots & (\phi_0,\phi_{M-2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_3) & \dots & (\phi_1,\phi_{M-2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ (\phi_{M-2},\phi_0) & (\phi_{M-2},\phi_1) & (\phi_{M-2},\phi_3) & \dots & (\phi_{M-2},\phi_{M-2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & (\phi_2,\phi_2) & (\phi_2,\phi_4) & \dots & (\phi_2,\phi_{M-1}) \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & (\phi_4,\phi_2) & (\phi_4,\phi_4) & \dots & (\phi_4,\phi_{M-1}) \\ & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & (\phi_{M-1},\phi_2) & (\phi_{M-1},\phi_4) & \dots & (\phi_{M-1},\phi_{M-1}) \end{vmatrix}$$

a můžeme podle Laplaceovy věty o determinantu kvazidiagonální matice (viz kupř. [5], I, 1, 5) psát $G = G^{\ell} . G^{s}$, kde G^{ℓ} a G^{s} jsou Grammovy determinanty podsystémů lichých a sudých funkcí. Jest tedy ovšem $G \neq 0$ tehdy a jen tehdy, když současně $G^{s} \neq 0$ a $G^{\ell} \neq 0$. To je právě nutná a postačující podmínka, aby podsystémy ϕ^{s} a ϕ^{ℓ} byly systémy lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{G}m_n$, což bylo dokázati.

c) Konečně dokážeme, že podsystémy ϕ^{s} a ϕ^{ℓ} jsou systémy lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{G}m_n$. Zvolme přirozené, liché číslo N tak, aby $\omega'_j = \omega_j \frac{N-1}{n-1}$ pro $j = 1,2,\dots,m-1$, byla vesměs přirozená čísla. Takové N lze zřejmě pro racionální ω_j vždy nalézt. Vezměme množinu $\mathcal{M}_N$ popsanou v definici 7. Jelikož podle předpokladu $\omega_j < \frac{1}{4}(n-1)$, potom jest $\omega'_j < \frac{1}{4}(N-1)$ a $|\omega'_j - \omega'_k|$, $\omega_j + \omega_k \in (0, \frac{1}{2}(N-1))$ pro $j,k = 1,2,\dots,m-1$ a můžeme psát:

$$\sum_{t' \in \mathcal{M}_N} \sin \omega'_j t' . \sin \omega'_k t' = \delta_{jk} \frac{N-1}{4} ,$$

kde δ_{jk} je Kroneckerovo δ. (viz kupř. [2], 5, §12).

Volme nyní lineární zobrazení na $\mathcal{M}_N$ takovéto: každému bodu $t' \in \mathcal{M}_N$ jest vztahem

$$t = t' \frac{N-1}{n-1}$$

přiřazen obraz $t \in \mathcal{N}_N$. Jelikož podle definice 7 pro každé $t' = t'_i \in \mathcal{M}_N$ platí:

$$t'_i = -\pi + \frac{2\pi}{N-1} i \quad , \ i = 0,1,\dots,N-1,$$

pak obrazy $t = t_i \in \mathcal{N}_N$ budou dány vztahy

$$t_i = -\pi \frac{N-1}{n-1} + \frac{2\pi}{n-1} i \quad , \ i = 0,1,\dots,N-1$$

a zřejmě $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{N}_N$. Tak jsme si definovali rozšíření množiny $\mathcal{M}_n$ na množinu $\mathcal{N}_N$.

Jelikož platí: $\omega'_j t' = \omega_j \frac{N-1}{n-1} t' = \omega_j t$, pro $t \in \mathcal{N}_N$, $t' \in \mathcal{M}_N$, $j = 1,2,\dots,m-1$, můžeme psát:

$$\sum_{t' \in \mathcal{M}_N} \sin \omega'_j t' . \sin \omega'_k t' = \sum_{t \in \mathcal{N}_N} \sin \omega_j t . \sin \omega_k t .$$

Označme pro okamžik: $a_{jk} = \sum_{t \in \mathcal{N}_N} \sin \omega_j t . \sin \omega_k t$,
$b_{jk} = \sum_{t \in \mathcal{M}_n} \sin \omega_j t . \sin \omega_k t$, $c_{jk} = \sum_{t \in \mathcal{N}_N - \mathcal{M}_n} \sin \omega_j t . \sin \omega_k t$.
Zřejmě platí: $a_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$, $j,k = 1,2,\dots,m-1$ a tudíž:
$\| b_{jk} \| + \| c_{jk} \| = \| a_{jk} \| = \frac{N-1}{4} E$, kde dvojitou svislou čarou značíme matice příslušných prvků a písmenem E jednotkovou matici.

Nyní můžeme konečně dokázat, že determinanty G_s a G_ℓ jsou nenulové. Vezměme kupř. $G_\ell = \det \| b_{jk} \|$. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\det \| b_{jk} \| = 0$. Pak ovšem platí:

$$\det \left(\frac{N-1}{4} E - \| c_{jk} \| \right) = 0.$$

Hledejme nyní takovou matici $\| c_{jk} \|$, která této rovnici hoví. Charakteristický polynom matice $\| c_{jk} \|$ musí mít $(m-1)$-násobný reálný kořen λ_j rovný právě $\frac{N-1}{4}$ (viz kupř. [11], II, §1,7). A dále podle Vietových vzorců (viz kupř. [11], III, § 1,11) musí diagonální prvky c_{jj} matice $\| c_{ij} \|$ splňovat vztah:

$$\sum_{j=1}^{m-1} c_{jj} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j = (m-1) \frac{N-1}{4}.$$

Avšak z našich předchozích úvah plyne, že současně musí platit:

$$\sum_{j=1}^{m-1} c_{jj} = \sum_{j=1}^{m-1} a_{jj} - \sum_{j=1}^{m-1} b_{jj} = (m-1) \frac{N-1}{4} - \sum_{j=1}^{m-1} b_{jj}.$$

Oba poslední vztahy mohou být současně splněny jen když
$\sum_{j=1}^{m-1} b_{jj} = 0$, což ovšem není možné, protože $b_{jj} =$
$= \sum_{t \in \mathcal{M}_n} \sin \omega_j t . \sin \omega_j t = \sum_{t \in \mathcal{M}_n} \sin^2 \omega_j t > 0$ a tudíž $\sum_{j=1}^{m-1} b_{jj} > 0$.

Z předpokladu, že $G_\ell = 0$ dostali jsme tedy spor, čímž je dokázáno, že $G_\ell \neq 0$, specielně pak $G_\ell > 0$ (viz [1], I,13). Zcela obdobně se dokáže i nerovnost $G_s > 0$, čímž se však zde nebudeme již zabývat.

Tak jsme tedy dokázali, že v každém bodě $(\omega)_{m,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{m-1} \subset \mathcal{R}_{m-1}$, v němž jsou jednotlivé frekvence vzájemně různé, dostáváme jeden a právě jeden polynom $T^{x}_{\omega} \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ vázaně-nejlepšího přiblížení k F. Podívejme se ještě na případ, kdy jednotlivé frekvence nejsou všechny vzájemně různé.

Nechť pro jednoduchost v (m-1)-tici frekvencí $(\omega)_{m,\varepsilon}$ jsou pouze k-tá a (k+1)-ní frekvence stejné ~~(tyto frekvence díky úmluvě~~ budou ovšem v (m-1)-tici ~~sousedními)~~. To znamená, že platí: $\phi_{2k-1} = \phi_{2k+1}$, $\phi_{2k} = \phi_{2k+2}$ a v normálních rovnicích:

$$\sum_{j=0,1,3,\ldots,M-2} (\phi_i, \phi_j) c'_j = (\phi_i, F) \ , \quad i=0,1,3,\ldots,M-2 \tag{18}$$

$$\sum_{j=2,4,6,\ldots,M-1} (\phi_i, \phi_j) c'_j = (\phi_i, F) \ , \quad i=2,4,6,\ldots,M-1 \tag{19}$$

jsou řádky pro $i=2k-1$, $2k+1$, respektive pro $i=2k$, $2k+2$ shodné. Vezměme pouze soustavu (18), neboť vše co řekneme o ní, bude platit rovněž o soustavě (19).

Soustava (18) má nekonečně mnoho řešení. Abychom vypočetli obecné řešení (viz [11], I, §2, odst. 5), vynechme řádek pro $i=2k+1$ a ve všech řádcích sečtěme součiny $(\phi_i, \phi_{2k-1}) c'_{2k-1}$ a $(\phi_i, \phi_{2k+1}) c'_{2k+1}$. Vznikne redukovaná soustava:

$$\sum_{\substack{j=0,1,3,\ldots,M-2 \\ j \neq 2k+1}} (\phi_i, \phi_j) c'_j = (\phi_i, F) \ , \quad i=0,1,3,\ldots,M-2;\ i \neq 2k+1,$$

kde na místě c'_{2k-1} bude vystupovat součet $(c'_{2k-1} + c'_{2k+1})$. Tato soustava má však podle předpokladu právě jedno řešení $(c'_0, c'_1, c'_3, \ldots, c'_{2k-1} + c'_{2k+1}, \ldots, c'_{M-2})$, jelikož ostatní frekvence jsou vzájemně různé. Jednotlivá řešení plynou pak z volby c'_{2k-1} resp. c'_{2k+1}, při čemž jejich součet je zachován. Podobný výsledek dostáváme ovšem i ze soustavy (19).

Tento výsledek můžeme interpretovat takto: Řešením soustavy normálních rovnic dostaneme "neurčité" koeficienty u k-té a (k+1)-ní složky polynomu $T^{x}_{\omega} \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$. Tyto složky mají ovšem stejné frekvence, takže je můžeme sečíst. U součtu těchto dvou složek je již ale "neurčitost" v koeficientech odstraněna a takto upravený polynom $\tilde{T}^{x}_{\omega}$ patří pak do třídy $\mathcal{T}_{m-1,\varepsilon}$ (při čemž zůstává dále prvkem "vyšší" třídy $\mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ - viz poznámky k definici 2).

Zcela stejně dostaneme i pro ℓ stejných frekvencí v $(\omega)_{m,\varepsilon}$ $\tilde{T}^{x}_{\omega} \in \mathcal{T}_{m-\ell+1,\varepsilon}$ atd.

Na první pohled je patrno, že budou-li existovat nějaké body $(\omega)_{m,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{m-1}$, v nichž bude vzdálenost $\varrho(F, T^{x}_{\omega})$ nabývat absolutně minimálních hodnot na $\mathcal{E}_{m-1}$, pak jich bude alespoň (m-1)! lišících se vzájemně pouze pořadím frekvencí. Jelikož nás všechny takové kombinace frekvencí nebudou zajímat, dohodněme se na tom, že všechny polynomy $T \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$ lišící se pouze pořadím složek, budeme považovat za shodné a budeme je zásadně zapisovat tak, aby posloupnost jejich frekvencí byla neklesající:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{m-1}. \tag{20}$$

Díky této úmluvě můžeme se dále při výběru frekvencí omezit jen na "výseč" $\sigma_{m-1} \subset \mathcal{E}_{m-1}$ definovanou nerovnostmi:

$$0 < \nu_1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{m-1} \leq \nu_2 < \tfrac{1}{4}(n-1). \tag{21}$$

Nyní se podívejme, jakých hodnot může nabývat složená funkce $\varrho^x = \varrho(T^x_\omega, F)$ na různých bodech $(\omega)_{m,\mathcal{E}}$ oblasti σ_{m-1} pro $T^x_\omega \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}$, $F \in \mathcal{G}_{m_n}$. Zřejmě na každém z bodů $(\omega)_{m,\mathcal{E}} \in \sigma_{m-1}$ bude ϱ^x omezené a nezáporné. Zkoumejme dva případy, které mohou nastat:

a) ϱ^x je na některém bodě $(\omega^0)_{m,\mathcal{E}} \in \sigma_{m-1}$ identicky rovna nule;

b) ϱ^x není na žádném bodě oblasti σ_{m-1} identicky rovna nule.

Ad a) Tento případ nastane zřejmě tehdy a jen tehdy, když $T^x_{\omega^0} \equiv F$. Bod $(\omega^0)_{m,\mathcal{E}}$ může ležet buď na hranici nebo uvnitř oblasti σ_{m-1}. Leží-li $(\omega^0)_{m,\mathcal{E}}$ na hranici σ_{m-1}, pak zřejmě jak jsme ukázali výše $T^x_{\omega^0} \in \mathcal{T}_{\mu,\mathcal{E}}$, $\mu < m$ a existuje tedy jistý vnitřní bod $(\omega^0)_{\mu,\mathcal{E}}$ oblasti $\sigma_{\mu-1}$ (o nižší dimensi) takový, pro nějž $\varrho(T^x_{\omega^0}, F) = 0$, $T^x_{\omega^0} \in \mathcal{T}_{\mu,\mathcal{E}}$. Lze tedy vždy nalézt takové $\mu \leq m$, pro něž $(\omega^0)_{\mu,\mathcal{E}}$ bude vnitřním bodem oblasti $\sigma_{\mu-1} \subset \mathcal{E}_{\mu-1}$.

Ad b) Neexistuje-li v σ_{m-1} žádný bod $(\omega^0)_{m,\mathcal{E}}$, pak zřejmě ϱ^x nenabývá absolutně minimální hodnoty na σ_{m-1} v žádném hraničním bodě σ_{m-1}. Předpokládejme pro okamžik, že ϱ^x takové hodnoty nabývá kupř. právě v hraničním bodě $(\omega^x)_{m,\mathcal{E}} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{m-1})$, $\omega_k = \omega_{k+1}$. To tedy znamená, že jednak $T^x_{\omega^x} \in \mathcal{T}_{m-1,\mathcal{E}}$ a dále nelze najít žádné α (pro $\omega \in \mathcal{E}$, $r \in E^+_1$ a $\varphi \in \mathcal{D}$) takové, aby platilo:

$$0 < \varrho(T^x_{\omega^x}, F) \leq \varrho(T^x_{\omega^x} + \alpha, F),$$

což zřejmě není pravda. Můžeme tedy i v tomto případě vyloučit hranici oblasti σ_{m-1} z úvah týkajících se absolutního minima ϱ^x na σ_{m-1}.

Zvolme nyní libovolné malé číslo $\delta > 0$, které nazveme **rozlišovací schopnost**. Uvažujme uzavřenou oblast $\sigma^{\delta}_{\mu-1}$, $\mu \leq m$, danou nerovnostmi:

$$0 < \nu_1 \leq \omega_1,\ \omega_1 + \delta \leq \omega_2,\ \omega_2 + \delta \leq \omega_3, \ldots, \omega_{\mu-2} + \delta \leq \omega_{\mu-1}, \qquad (22)$$
$$\omega_{\mu-1} \leq \nu_2 < \tfrac{1}{4}(n-1).$$

Ukážeme, že v takovéto oblasti je zobrazení ϱ^x analytické. Pro $M = 2\mu - 1$ platí:

$$\varrho^x = \varrho(T^x_{\omega}, F) = \sqrt{\sum_{t \in \mathfrak{M}_n} \Big(F(t) - \sum_{j=0}^{M-1} c'_j \phi_j(t)\Big)^2}\ ,$$

kde c'_j jsou vázaně-optimální koeficienty. Zřejmě je ϱ^x na nějaké množině analytická tehdy a jen tehdy, když je na téže množině analytická i $\tilde{\varrho}$ daná (ve zkráceném zápisu) vztahem:

$$\tilde{\varrho} = -2\sum_j c'_j \sum_t F\phi_j + \sum_{j,k} c'_j c'_k \sum_t \phi_j \phi_k = -2\sum_j c'_j (F, \phi_j) + \sum_{j,k} c'_j c'_k (\phi_j, \phi_k).$$

Uvážíme-li, že $c'_j = \frac{1}{G}\sum_{\ell=0}^{M-1} A_{j,\ell}(F, \phi_\ell)$, $j = 0, 1, \ldots, M-1$ (viz kupř. [~~14~~ 11] II, §1,2), kde G je Grammův determinant systému ϕ a $A_{j,\ell}$ jsou algebraické doplňky prvků (ϕ_j, ϕ_ℓ) matice soustavy normálních rovnic, dostaneme:

$$\tilde{\varrho} = -\frac{2}{G}\sum_{j,\ell} A_{j,\ell}(F, \phi_j)(F, \phi_\ell) + \frac{1}{G^2}\sum_{i,j,k,\ell} (\phi_i, \phi_k) A_{i,j} A_{k,\ell} (F, \phi_j)(F, \phi_\ell).$$

Podle věty 1 je $G > 0$ ve všech bodech $\sigma^{\delta}_{\mu-1}$. Algebraické doplňky $A_{j,\ell}$ lze vyjádřit jako součty a rozdíly součinů $2\mu - 2$ skalárních součinů funkcí systému ϕ, determinant G jako součty a rozdíly součinů $2\mu - 1$ těchto skalárních součinů. Jsou tedy jak algebraické doplňky, tak i Grammův determinant analytickými funkcemi bodu $(\omega)_{\mu,\varepsilon} \in \sigma^{\delta}_{\mu-1}$. Podobně i skalární součiny (F, ϕ_j), $j = 0, 1, \ldots, M-1$ jsou analytickými funkcemi $(\omega)_{\mu,\varepsilon} \in \sigma^{\delta}_{\mu-1}$. Je tedy ϱ^x v $\sigma^{\delta}_{\mu-1}$ analytické, což jsme chtěli ukázat.

§ 4) Formulace problému anharmonické analýzy.

Označme třídu všech polynomů z $\mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ takových, jejichž frekvence $(\omega)_{m,\varepsilon}$ jsou z σ^{δ}_{m-1} symbolem $\mathcal{T}_{m,\varepsilon,\delta}$. Můžeme pak definovat třídu obecných trigonometrických polynomů nejlepšího přiblížení k F takto:

Definice 8: Nechť je předem dána funkce $F \in \mathcal{G}m_n$ a nechť pevná m, ε splňují podmínky věty 1. Nechť je dáno pevné δ, vyhovující nerovnostem $0 < \delta < \frac{\nu_2 - \nu_1}{m-2}$. Pak třídu všech polynomů $T^x \in \mathcal{T}^x_{\mu,\varepsilon,\delta} \subset \mathcal{T}_{\mu,\varepsilon,\delta}$, $\mu \leq m$, které splňují podmínku:

$$\varrho(T^x, F) \leq \varrho(T,F), \quad T \in \mathcal{T}_{\mu,\varepsilon,\delta} \tag{23}$$

nazveme třídou <u>obecných trigonometrických polynomů nejlepšího přiblížení k F</u> (pro danou metriku a daná μ, ε, δ).

Jak jsme ukázali v minulém paragrafu, je zobrazení $\varrho(T^x_\omega, F)$ v $\mathcal{O}^\delta_{\mu-1}$ analytické. Existuje tedy v $\mathcal{O}^\delta_{\mu-1}$ alespoň jeden, ale nanejvýš konečně mnoho bodů $(\omega)_{\mu,\varepsilon}$ na nichž ϱ^x nabývá absolutně nejmenší hodnoty v $\mathcal{O}^\delta_{\mu-1}$, protože případ, že ϱ^x je na nějaké podmnožině vyšší mohutnosti v dané oblasti konstantní zřejmě nemůže nastat právě díky tomu, že ϱ^x je analytická. Obsahuje tudíž $\mathcal{T}^x_{\mu,\varepsilon,\delta}$ alespoň jeden ale nejvýš konečně mnoho polynomů T^x a definice popisuje tak konečnou a neprázdnou třídu pro každé $\mu = 2,3,\dots,m$.

Hledejme nyní jediný polynom $\tilde{T}^x$ nejlepšího přiblížení k F takový, který má tyto vlastnosti:

1) nejmenší vzdálenost od F ze všech $T^x \in \mathcal{T}^x_{\mu,\varepsilon,\delta} \subset \mathcal{T}_{\mu,\varepsilon,\delta}$, $\mu = 2,3,\dots,m$;
2) nejmenší možné μ ze všech polynomů vyhovujících podmínce 1);
3) nejmenší možnou hodnotu $S = \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega_j$ ze všech polynomů vyhovujících podmínce 2);
4) nejmenší hodnotu ω_1 ze všech polynomů vyhovujících podmínce 3);
5) nejmenší hodnotu ω_2 ze všech polynomů vyhovujcích podmínce 4);

.
.
.

$1+\mu$) nejmenší hodnotu $\omega_{\mu-2}$ ze všech polynomů vyhovujících podmínce μ);

Tento algoritmus zřejmě vskutku vede k nalezení jediného polynomu $\widetilde{T}^x$. Bude-li F empirickou funkcí danou tabulkou, pak můžeme téměř s určitostí říci, že pro dostatečně malé δ bude množina $\mathcal{T}^x_{m,\varepsilon,\delta}$ obsahovat pouze jediný prvek T^x, který bude mít právě všechny požadované vlastnosti. Nalezení polynomu $\widetilde{T}^x$ (s popsanými vlastnostmi) pro předem danou $F \in \mathcal{G}m_n$ budeme nazývat <u>anharmonickou analýzou F</u> (pro dané m, δ v daném frekvenčním rozsahu ε). Frekvence $\widetilde{\omega}^x_1, \widetilde{\omega}^x_2, \dots, \widetilde{\omega}^x_{\mu-1}$ polynomu $\widetilde{T}^x$ budeme nazývat (pro F) <u>charakteristickými</u> parametry a koeficienty tohoto polynomu budeme nazývat <u>optimálními</u> (pro dané m, ε, δ).

Naskýtají se nyní dvě cesty, které je možno při anharmonické analýze sledovat:

a) Hledat postupně $\mathcal{T}^x_{\mu,\varepsilon,\delta}$ pro $\mu = 2,3,\dots,m$ a sledovat klesání hodnoty vzdálenosti $\varrho(T^x, F)$. Jakmile tato hodnota klesne pro jisté $\mu = \nu$ buď pod předem stanovenou mez (je-li taková mez zadána) nebo na nulu (při zadaném m), vybereme ze získaných tříd $\mathcal{T}^x_{\mu,\varepsilon,\delta}$ ($\mu = 2,3,\dots,\nu$) polynom $\widetilde{T}^x$, který má vlastnosti 1) až $1+\mu$).

b) Hledat rovnou $\mathcal{T}^x_{m,\varepsilon,\delta}$. Leží-li některá z frekvencí některého z polynomů z této třídy na hranici σ^{δ}_{m-1}, pak hledat třídu $\mathcal{T}^x_{m-1,\varepsilon,\delta}$ atd, až žádná z frekvencí žádného z polynomů třídy $\mathcal{T}^x_{\nu,\varepsilon,\delta}$ neleží na hranici $\sigma^{\delta}_{\nu-1}$. Z této třídy vybereme polynom $\widetilde{T}^x$, který má vlastnosti 3) až $1+\nu$).

Přesné řešení u obou dvou naznačených způsobů je obecně značně obtížné (hledání absolutních minim reálné funkce více racionálních proměnných) a numerické řešení neobyčejně pracné. Uchylujeme se proto k různým přibližným metodám jako kupř. metodě Fourierovy transformace (viz kupř. [8] IV, odst. 17-22; [16] IV, §2) nebo autokorelační metodě (viz kupř. [16], II, a další; [12] doplňky, §2).

V dalším odstavci popíšeme jinou přibližnou metodu, která poskytla poměrně dobré výsledky při prověřování jednak na zkušebních příkladech a dále i při použití k řešení některých úloh v geofysice.

II) Postupná anharmonická analýza

§ 1) Popis metody

Metoda vychází z prvního, námi popsaného způsobu přesné anharmonické analýzy. Najdeme nejprve $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}^x \in \mathcal{T}_{2,\varepsilon}$ (pro předem danou $F \in \mathcal{G}m_n$ a ε). To znamená, že funkční hodnoty funkce $\widetilde{T}_1$ dostaneme z rovnic:

$$\widetilde{T}_1(t) = a_0^{1x} + a_1^{1x}\cos\widetilde{\omega}_1^{1x}t + b_1^{1x}\sin\widetilde{\omega}_1^{1x}t =$$

$$= a_0^{1x} + r_1^{1x}\cos(\widetilde{\omega}_1^{1x}t - \varphi_1^{1x}) \text{ , } t \in \mathcal{M}_n \text{ ,}$$

kde $\widetilde{\omega}_1^{1x}$ je ~~nejmenší ze všech~~ optimálních frekvencí $\widetilde{\omega}_1^{x}$, a_0^{1x}, a_1^{1x}, b_1^{1x} jsou optimální koeficienty a r_0^{1}, r_1^{1x}, φ_1^{1x} jsou optimální parametry obecného trigonometrického polynomu pro danou F a m=2. Dále vyjdeme z předpokladu, že při určení $\widetilde{T}^x \in \mathcal{T}_{3,\varepsilon}$ dostaneme první optimální frekvenci $\widetilde{\omega}_1^x$ tohoto polynomu pouze "málo se lišící" *) od $\widetilde{\omega}_1^{1x}$. Tento předpoklad bude patrně správným, budou-li se charakteristické frekvence dané funkce v polynomu $\widetilde{T}^x \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$, pro $m > 2$, od sebe "dosti lišit". K podobným závěrům se dochází při zkoumání vlastností Fourierovy transformace (viz kupř. [16],IV). Bude-li náš předpoklad splněn, pak se patrně nedopustíme "příliš veliké" chyby, když místo abychom hledali dvojici frekvencí ($\widetilde{\omega}_1^x$, $\widetilde{\omega}_2^x$), budeme hledat odděleně "přibližnou" hodnotu $\widetilde{\omega}_2^x$ takto:

---

*) Nezabývám se detailním vymezením pojmů "málo se lišící" a "dosti se lišící" frekvence, "příliš veliká" chyba, "přibližná" hodnota frekvence. Domnívám se, že toto vymezení by bylo velice pracné a mohlo by představovat mnohaměsíční ne-li mnohaletou práci. Pro srovnání poznamenávám, že o podobných problémech v teorii Fourierovy transformace bylo napsáno mnoho původních matematických prací.

a) Vypočteme 1.zbytek $\Delta^{1}F$ funkce F z rovnice:

$$\Delta^{1}F = F - \widetilde{T}_1 . \tag{24}$$

Nyní můžeme rozlišit dva případy:

α) $\Delta^{1}F \equiv 0$,

β) $\Delta^{1}F \not\equiv 0$ a pak $\Delta^{1}F$ můžeme považovat opět za "předem danou funkci z $\mathcal{G}m_n$".

b) Je-li $\Delta^{1}F \not\equiv 0$, najdeme $\widetilde{T}_2 = \widetilde{T}^{\times} \in \mathcal{T}_{2,\varepsilon}$ (pro předem danou $\Delta^{1}F \in \mathcal{G}m_n$ a ε). Je-li $\Delta^{1}F \equiv 0$, pak položíme $\widetilde{T}_2 \equiv 0$. Není-li $\widetilde{T}_2 \equiv 0$, pak nalezenou frekvenci $\widetilde{\omega}_1^{2\times}$ budeme považovat za přibližnou hodnotu frekvence $\widetilde{\omega}_2^{\times}$. Je-li $\widetilde{T}_2 \equiv 0$, pak F nemá žádnou další charakteristickou frekvenci.

Naprosto stejně postupujeme dále. Utvoříme 2.zbytek $\Delta^{2}F$ funkce F podle rovnice:

$$\Delta^{2}F = \Delta^{1}F - \widetilde{T}_2$$

a nalezneme $\widetilde{\omega}_1^{3\times}$ atd. Po μ krocích nalezneme tedy μ frekvencí $\widetilde{\omega}_1^{j\times}$, $j = 1,2,\dots,\mu$, když žádné $\Delta^{j-1}F$ nebylo identicky rovno nule nebo $\nu < \mu$ frekvencí, když $\mu - \nu$ posledních zbytků bylo rovno nule.

Pro další účely můžeme použít buď pouze μ "přibližných" hodnot charakteristických frekvencí (tj. $\widetilde{\omega}_1^{j\times}$) anebo přímo polynom:

$$\overset{\mu+1}{\widetilde{T}}(t) = \sum_{j=1}^{\mu} \widetilde{T}_j(t) = \widetilde{a}_0 + \sum_{j=1}^{\mu} (\widetilde{a}_1^{j\times} \cos \widetilde{\omega}_1^{j\times} t + b_1^{j\times} \sin \widetilde{\omega}_1^{j\times} t) =$$
$$= \widetilde{a}_0 + \sum_{j=1}^{\mu} r_1^{j\times} \cos(\widetilde{\omega}_1^{j\times} t - \varphi_1^{j\times}), \quad t \in m_n, \ \widetilde{a}_0 = \sum_{j=1}^{\mu} a_0^{j\times} . \tag{25}$$

O polynomu $\overset{\mu+1}{\widetilde{T}}$ jehož funkční hodnoty jsou dány vztahem (25), tj. o polynomu zkonstruovaném podle uvedeného návodu, můžeme nyní vyslovit několik tvrzení.

§ 2) Některé vlastnosti metody

Věta 2 (o existenci jediného polynomu $\overset{m}{\widetilde{T}}$). Nechť jsou splněny předpoklady definice 8 . Pak polynom $\overset{m}{\widetilde{T}} \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$ popsaný rovnicí (25) existuje právě jeden.

Důkaz: Zřejmě pro každou danou funkci $F \in \mathcal{G}m_n$ existuje právě jeden polynom $\tilde{T}_1$, což plyne bezprostředně z tvrzení ~~věty 2~~ v. § I/4 jako zvláštní případ, pro m=2. Rovnicí (24) je definována právě jedna funkce $\Delta^1 F \in \mathcal{G}m_n$ a tudíž existuje opět právě jeden polynom $\tilde{T}_2$ (podle § I/4) atd. Jsou-li pak sčítance definovány jednoznačně, je i součet, tj. právě hledaný polynom $\tilde{\overset{m}{T}}$, právě jeden, což bylo třeba dokázat.

Věta 3 (o zlepšení přiblížení s rostoucím μ). Nechť jsou splněny předpoklady definice 8 a nechť přirozená čísla μ, ν vyhovují nerovnostem: $2 \leq \mu < \nu \leq m$. Pak platí:

$$\varrho(\tilde{\overset{\mu}{T}}, F) \geq \varrho(\tilde{\overset{\nu}{T}}, F), \quad \tilde{\overset{\mu}{T}} \in \mathcal{T}_{\mu,\varepsilon}, \quad \tilde{\overset{\nu}{T}} \in \mathcal{T}_{\nu,\varepsilon}, \tag{26}$$

při čemž rovnost platí tehdy a jen tehdy, když $\Delta^{\mu-1}F \equiv 0$.

Důkaz: V důkazu použijeme identity: $\varrho(F,T) \equiv \varrho(F - T, 0)$, která bezprostředně vyplývá z definice vzdálenosti dané vztahem (5), jak se lze snadno přesvědčit. Platí $\Delta^{\mu-1}F = \Delta^{\mu-2}F - \tilde{T}_{\mu-1} = F - \tilde{\overset{\mu}{T}}$. Tedy $\varrho(\tilde{\overset{\mu}{T}}, F) = \varrho(\Delta^{\mu-1}F, 0)$ a $\varrho(\tilde{\overset{\nu}{T}}, F) = \varrho(\Delta^{\nu-1}F, 0)$. Položme pro jednoduchost ν rovno pouze $\mu+1$. Dostáváme $\Delta^{\nu-1}F = \Delta^{\mu-1}F - \tilde{T}_\mu$ a tudíž $\varrho(\Delta^{\nu-1}F, 0) = \varrho(\Delta^{\mu-1}F - \tilde{T}_\mu, 0) = \varrho(\Delta^{\mu-1}F, \tilde{T}_\mu)$. Z definice $\tilde{T}_\mu$ plyne: $\varrho(\Delta^{\mu-1}F, \tilde{T}_\mu) \leq \varrho(\Delta^{\mu-1}F, T_\mu)$, $T_\mu \in \mathcal{T}_{2,\varepsilon}$. Vezmeme-li (jako zvláštní případ) $0 \in \mathcal{T}_{2,\varepsilon}$, pak dostáváme okamžitě $\varrho(\Delta^{\nu-1}F, 0) \leq \varrho(\Delta^{\mu-1}F, 0)$ neboli $\varrho(\tilde{\overset{\nu}{T}}, F) \leq \varrho(\tilde{\overset{\mu}{T}}, F)$, čímž je dokázáno první tvrzení věty. Rovnost platí pak zřejmě tehdy a jen tehdy, když $\tilde{T}_\mu \equiv 0$, což podle popisu metody nastane jen tehdy, když $\Delta^{\mu-1}F \equiv 0$. Bude-li $\Delta^{\mu-1}F \not\equiv 0$, pak evidentně existuje $\tilde{T}_\mu \not\equiv 0$ a ve (26) platí ostrá nerovnost. Tím je dokázáno celé tvrzení věty.

Podle tvrzení věty 2, je každé $F \in \mathcal{G}m_n$, pro předem dané m a ε, přiřazen právě jeden polynom $\tilde{\overset{m}{T}} \in \mathcal{T}_{m,\varepsilon}$. Označme jej pro okamžik symbolem $\tilde{\overset{m}{T}}\big|_F$. Můžeme pak vyslovit větu:

Věta 4 (o invariantnosti přibližných charakteristických frekvencí funkce F vzhledem k transformaci $F \rightarrow F+\text{konst.}$). Nechť jsou splněny předpoklady definice 8. Pak pro každé reálné číslo K platí vztah:

$$\overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_{(F+K)} = \overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_F + K\,,\ \overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_{(F+K)},\ \overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_F \in \mathcal{T}_{m,\mathcal{E}}\,. \tag{27}$$

Tvrzení této věty dokážeme až v dalším paragrafu, kde bude zavedena symbolika, jejíž použití učiní důkaz podstatně přehlednější. Věta říká jinými slovy toto: nechť polynom $\overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_F$ má přibližné charakteristické frekvence $\widetilde{\omega}\overset{j}{1}\Big|_F^{x}$ a koeficienty $\widetilde{a}_o\Big|_F$, $a\overset{j}{1}\Big|_F^{x}$, $b\overset{j}{1}\Big|_F^{x}$ a podobně $\overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_{(F+K)}$ má přibližné charakteristické frekvence a koeficienty označeny $\Big|(F+K)$, pro $j=1,2,\dots,m-1$. Pak platí:

$$\widetilde{\omega}\overset{j}{1}\Big|_F^{x} = \widetilde{\omega}\overset{j}{1}\Big|_{(F+K)}^{x}\,,\quad a\overset{j}{1}\Big|_F^{x} = a\overset{j}{1}\Big|_{(F+K)}^{x},\quad b\overset{j}{1}\Big|_F^{x} = b\overset{j}{1}\Big|_{(F+K)}^{x} \quad \text{pro } j=1,2,\dots,m-1$$

a $\widetilde{a}_o\Big|_F + K = \widetilde{a}_o\Big|_{(F+K)}$.

Na závěr tohoto paragrafu vyslovíme ještě větu:

<u>Věta 5</u> (o přesném řešení pro jednoduchou kosinusovku). Nechť jsou splněny předpoklady definice 8 a nechť jest :
$F(t) = A_o + A_1\cos\beta t + B_1\sin\beta t,\quad t \in \mathcal{M}_n$, kde $A_o, A_1, B_1 \in E_1$ a $\beta \in \mathcal{E}$. Pak platí:

$$\overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_F = \widetilde{T}_1\Big|_F,\ a\overset{1}{o}\Big|_F^{x} = A_o,\ a\overset{1}{1}\Big|_F^{x} = A_1,\ b\overset{1}{1}\Big|_F^{x} = B_1,\ \widetilde{\omega}\,\overset{1}{1}\Big|_F^{x} = \beta\,. \tag{28}$$

<u>Důkaz</u>: je ovšem evidentní. Zřejmě jest $\varrho\,(\widetilde{T}_1\Big|_F, F) = 0 < \varrho\,(T,F)$, pro $T \in \mathcal{T}_{2,\mathcal{E}}$, $\widetilde{T}_1\Big|_F$ popsané rovnicemi (28) a $T \neq \widetilde{T}_1\Big|_F$.
Dostaneme tedy $\Delta^1 F \equiv 0$ a $\widetilde{T}_2\Big|_F \equiv \widetilde{T}_3\Big|_F \equiv \dots \equiv \widetilde{T}_{m-1}\Big|_F \equiv 0$
a tudíž $\overset{m}{\widetilde{T}}\Big|_F \equiv \widetilde{T}_1\Big|_F$ čímž je věta dokázána.

§ 3) <u>Numerické řešení</u>

V tomto paragrafu ukážeme, jak pro danou $F \in \mathcal{G}_{\mathcal{M}_n}$ nalézt polynom $\widetilde{T}_1$ v čemž zřejmě tkví podstata naší úlohy. Znajíce $\widetilde{T}_1$ vypočteme již snadno $\Delta^1 F$ a nalezení $\widetilde{T}_j$ je dále zcela shodné s nalezením $\widetilde{T}_1$, když místo F vezmeme funkci $\Delta^{j-1}F$ pro $j=2,3,\dots,\mu$. Učiňme proto následující úmluvu.

<u>Úmluva</u> : Pokud nebude řečeno jinak, budeme v tomto paragrafu u písmen T, ω, a, b zásadně vypouštět všechny indexy 1. Dále u sumačních znaků $\sum\limits_{t \in \mathcal{M}_n}$ budeme vypouštět symbol $t \in \mathcal{M}_n$ a konečně budeme užívat této symboliky:

$$\sum F = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} F(t),\ \sum F \cos = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} F(t)\cos \omega \tfrac{1}{1}t,$$
$$\sum F \sin = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} F(t)\sin \omega \tfrac{1}{1}t,\quad Q = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} \cos \omega \tfrac{1}{1}t,$$
$$Q_1 = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} \cos^2 \omega \tfrac{1}{1}t,\quad Q_2 = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} \sin^2 \omega \tfrac{1}{1}t,\ \sum F^2 = \sum_{t\in \mathcal{M}_n} F^2(t).$$

Po této úmluvě můžeme vyslovit větu:

<u>Věta 6.</u> Nechť je dána $F \in \mathcal{G}_{\mathcal{M}_n}$ a frekvenční rozsah $\mathcal{E}$ splňující podmínky věty 1 . Pak (první) přibližnou charakteristickou frekvenci $\tilde{\omega}^x$ nalezneme jako nejmenší z argumentů ω^x absolutních minim funkce:

$$\varrho^2 = \sum F^2 - a_0' \sum F - a' \sum F \cos - b' \sum F \sin , \tag{29}$$

kde $a_0', a', b' \in E_1$ jsou vázaně-optimální koeficienty dané formulemi:

$$a_0' = \frac{\sum F - Qa'}{n},\quad a' = \frac{n\sum F \cos - Q\sum F}{nQ_1 - Q^2},\quad b' = \frac{\sum F \sin}{Q_2}, \tag{30}$$

kde $nQ_1 - Q^2 > 0$, $Q_2 > 0$. Koeficienty a_0', a', b' vypočtené pro $\omega = \tilde{\omega}^x$ jsou rovny optimálním koeficientům a_0^x, a^x, b^x.

<u>Důkaz</u>: rozdělíme na tři části:

a) Předně dokážeme, že vázaně-optimální koeficienty jsou dány právě vztahy (30). Podle ~~definice~~ lemmy 2 ~~a tvrzení bezprostředně následujícího~~ lze získat trojici vázaně-optimálních koeficientů ze soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
(1,1)a_0' + (1,\cos \omega t)a' + (1,\sin \omega t)b' &= (1,F)\\
(\cos \omega t,1)a_0' + (\cos \omega t,\cos \omega t)a' + (\cos \omega t,\sin \omega t)b' &= (\cos \omega t,F)\\
(\sin \omega t,1)a_0' + (\sin \omega t,\cos \omega t)a' + (\sin \omega t,\sin \omega t)b' &= (\sin \omega t,F).
\end{aligned} \tag{31}$$

Podle důkazu věty 1 jest však funkce, jejíž funkční hodnotou je $\sin \omega t$ (pro $t \in \mathcal{M}_n$), ortogonální k ostatním dvěma funkcím (s funkčními hodnotami 1, $\cos \omega t$, pro $t \in \mathcal{M}_n$). Uvážíme-li toto a použijeme-li symboliku dohodnutou ~~v úmluvě~~ , můžeme soustavu (31) přepsat takto:

$$\begin{aligned}
n a_0' + Q a' &= \sum F\\
Q a_0' + Q_1 a' &= \sum F \cos
\end{aligned} \tag{31'a}$$

$$Q_2 b' = \sum F \sin . \tag{31'b}$$

Řešení této soustavy je zřejmě dáno rovnicemi (30). Jest třeba ještě dodat, že v rovnicích (30) bude nutně Q_2 nezáporné (součet nezáporných čísel ne všech rovných nule), stejně jako jmenovatel druhého výrazu, tj. $nQ_1 - Q^2$. Jest totiž podle Buňakovského nerovnosti (viz kupř. [2], 5, §1): $nQ_1 - Q^2 \geq 0$, při čemž pro náš případ přichází v úvahu pouze ostrá nerovnost, jelikož obě funkce (s funkčními hodnotami 1, $\cos \omega t$, pro $t \in \mathcal{M}_n$) jsou lineárně nezávislé (viz tamtéž). Jejich lineární nezávislost byla dokázána ve větě 1. Tím je naše tvrzení dokázáno.

b) Dále dokážeme, že kvadrát vzdálenosti $\varrho(F, T^{\times}_{\omega}) = \varrho$, kde $T^{\times}_{\omega}(t) = a'_0 + a' \cos \omega t + b' \sin \omega t$, jest dán právě rovnicí (29). Jest $\varrho = \sqrt{\Sigma (F - T^{\times}_{\omega})^2}$. Dosaďme za $T^{\times}_{\omega}$ a proveďme předepsané umocnění. Dostáváme: $\varrho = \sqrt{\Sigma (F^2 + a'^2_0 + a'^2 \times}$ $\times \cos^2 \omega t + b'^2 \sin^2 \omega t - 2Fa'_0 - 2Fa' \cos \omega t - 2Fb' \sin \omega t +$ $+ 2a'_0 a' \cos \omega t + 2a'_0 b' \sin \omega t + 2a' b' \cos \omega t \cdot \sin \omega t)$.

Podle první části důkazu věty 1 (o ortogonalitě funkcí) jest:

$\Sigma\, 2a'_0 b' \sin \omega t = 2a'_0 b' (1, \sin \omega t) = 0$,

$\Sigma\, 2a' b' \cos \omega t \cdot \sin \omega t = 2a' b' (\cos \omega t, \sin \omega t) = 0$.

Dosadíme-li ještě do rovnice pro ϱ vztahy (31'), dostáváme po umocnění na druhou právě rovnici (29), což jsme měli ukázat.

c) Důkazy ostatních tvrzení jsou nyní již nasnadě. Podle definice polynomu $\widetilde{T}$ jest frekvence $\widetilde{\omega}^{\times}$ nejmenší ze všech ~~optimálních frekvencí~~ , ~~které budou ovšem~~ racionálních argumentů absolutních minim funkce ϱ. Jelikož je vzdálenost jakýchkoliv dvou prvků $\mathcal{G}_{\mathcal{M}_n}$ podle definice číslem nezáporným, je funkce ϱ funkcí nezápornou a bude tudíž nabývat absolutně minimálních hodnot na $\mathcal{E}$ pro tytéž argumenty jako funkce $\varrho^2 = \varrho^2(F, T^{\times}_{\omega})$. Podle ~~věty~~ §I/4 existuje pak právě jedna ~~nejmenší~~ optimální frekvence $\widetilde{\omega}^{\times}$. Vázaně-optimální koeficienty, vázané na tuto frekvenci jsou pak ovšem právě hledanými optimálními koeficienty $a^{\times}_0$, $a^{\times}$, $b^{\times}$. Tak jsme dokázali všechna tvrzení věty 6.

Zde je třeba poznamenat, že pro $\omega = k(n-1)/n$, $k = 1, 2, \ldots$, matice soustavy (31'a) degeneruje v matici diagonální tvaru:

$$n \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1/2 \end{Vmatrix},$$

neboť výraz Q je roven nule. Není tedy možno použít k výpočtu koeficientu a_o' rovnice:

$$a_o' = \frac{\sum F \cos - Q_1' a'}{Q} .$$

Nyní konečně dokážeme tvrzení věty 4 z minulého paragrafu.

<u>Důkaz věty 4</u>: Vezměme $\varrho_1^2|_F = \varrho_1^2(F, T_\omega^x)$ popsanou formulí (29). Uvážíme-li ve formuli (29) vztahy (30), dostaneme po jednoduché úpravě:

$$\varrho_1^2|_F = \sum F^2 - \frac{(\sum F)^2}{n} - \frac{(\sum F \sin)^2}{Q_2} - \frac{(n\sum F \cos - Q\sum F)^2}{n^2 Q_1 - nQ^2} . \quad (32)$$

Podobně pro funkci $F+K$ dostáváme:

$$\varrho_1^2|_{(F+K)} = \sum (F+K)^2 - \frac{(\sum F + \sum K)^2}{n} - \frac{(\sum F \sin - \sum K \sin)^2}{Q_2} -$$
$$- \frac{1}{n^2 Q_1 - nQ^2} (n\sum F \cos + n\sum K \cos - Q\sum F - Q\sum K)^2 . \quad (33)$$

Po umocnění obdržíme:

$$\varrho_1^2|_{(F+K)} = \varrho_1^2|_F + \varrho_1^2|_K + 2(\sum FK - \frac{1}{n}\sum F \sum K - Q_2 b'|_K b'|_F - \frac{nQ_1 - Q^2}{n} a'|_K a'|_F) =$$
$$= \varrho_1^2|_F + \varrho_1^2|_K + \Delta\varrho_1^2|_{(F+K)} . \quad (33')$$

Uvažme nyní vztahy: $\sum FK = K\sum F$, $\sum K = nK$, $\sum K \sin = 0$, $\sum K \cos = KQ$. Dostáváme: $a'|_K = 0$, $b'|_K = 0$, $a_o'|_K = K$,

$\Delta\varrho_1^2|_{(F+K)} = 2(K\sum F - \frac{1}{n}\sum F . nK) = 0$, $\varrho_1^2|_K = \sum K^2 - K\sum K = 0$

a konečně $\varrho_1^2|_{(F+K)} = \varrho_1^2|_F$.

Zřejmě tedy pro obě funkce (F i $F+K$) dostaneme stejné hodnoty přibližných charakteristických frekvencí $\tilde{\omega}^x$ a stejné první zbytky.

Ze vztahů (30) snadno odvodíme: $b'\big|_{(F+K)} = \dfrac{\sum (F+K)\sin}{Q_2} =$

$$= \frac{\sum F \sin}{Q_2} = b'\big|_F \,,\ a'\big|_{(F+K)} = \frac{n\sum (F+K)\cos - Q\sum (F+K)}{nQ_1 - Q^2} =$$

$$= \frac{n\sum F\cos + nKQ - Q\sum F - QnK}{nQ_1 - Q^2} = a'\big|_F \,,$$

$$a'_o\big|_{(F+K)} = \frac{\sum (F+K) - Qa'\big|_{(F+K)}}{n} = \frac{\sum F - Qa'\big|_F}{n} + \frac{nK}{n} = a'_o\big|_F + K \,.$$

Jelikož jsou stejné přibližné charakteristické frekvence i stejné vázaně-optimální koeficienty, jsou stejné i optimální koeficienty a platí tedy: $\tilde{T}_1\big|_{(F+K)} = \tilde{T}_1\big|_F + K$. Jelikož i první zbytky jsou pro obě funkce stejné, jest $\tilde{T}_j\big|_{(F+K)} = \tilde{T}_j\big|_F$, pro $j = 2,3,\dots,m-1$ a tudíž $\overset{m}{T}\big|_{(F+K)} = \overset{m}{T}\big|_F + K$, což se mělo dokázat.

Formule pro skalární součiny funkcí použitého systému (tj. formule pro Q, Q_1, Q_2) nejsou nejvhodnější k numerickému výpočtu. Zřejmě pro předem dané $\mathcal{M}_n$, hodnoty Q, Q_1, Q_2 jsou závislé pouze na velikosti ω. Platí:

Věta 7: Nechť je dána množina $\mathcal{M}_n$ a frekvenční rozsah $\mathcal{E}$ splňující podmínky věty 1. Pak pro každé $\omega \in \mathcal{E}$ jest:

$$Q = \sum \cos \omega t = \sin(n\pi\omega/(n-1))/\sin(\pi\omega/(n-1)), \tag{34}$$

$$Q_1 = \sum \cos^2 \omega t = \tfrac{1}{2}(n+\sin(2n\pi\omega/(n-1))/\sin(2\pi\omega/(n-1))), \tag{35}$$

$$Q_2 = \sum \sin^2 \omega t = \tfrac{1}{2}(n-\sin(2n\pi\omega/(n-1))/\sin(2\pi\omega/(n-1))). \tag{36}$$

Důkaz: Jest pro každé přirozené μ a reálné x:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\mu} \cos ix &= \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{1}{2}\mu x . \sin \frac{1}{2}(\mu+1)x}{\sin \frac{1}{2} x} & \text{pro } x \neq \pm 2k\pi \\[2ex] \mu + 1 & \text{pro } x = \pm 2k\pi \end{cases} \\[2ex]
\sum_{i=0}^{\mu} \sin ix &= \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{1}{2}\mu x . \sin \frac{1}{2}(\mu+1)x}{\sin \frac{1}{2} x} & \text{pro } x \neq \pm 2k\pi \\[2ex] 0 & \text{pro } x = \pm 2k\pi \end{cases}
\end{aligned}\right\} \text{pro } k=0,1,\dots$$

(viz [18], str. 146, vzorce 1 a 4). Jelikož podle předpokladu $\omega \in (0, \frac{1}{4}(n-1))$ a $n \geq 3$, dostáváme analogicky:

$$\sum \cos \omega t = \sum_{i=0}^{n-1} \cos(\omega(-\pi + 2\pi i/(n-1))) = \sum_{i=0}^{n-1} (\cos \omega\pi . \cos(2\pi\omega i/$$

$$/(n-1)) + \sin\omega\pi . \sin(2\pi\omega i/(n-1))) = \cos\omega\pi . \cos((n-1)2\pi\omega/$$

$$/(2(n-1))) . \sin(2n\pi\omega/(2(n-1)))/\sin(2\pi\omega/(2(n-1))) + \sin\omega\pi .$$

$$. \sin((n-1)2\pi\omega/(2(n-1))) . \sin(2n\pi\omega/(2(n-1)))/\sin(2\pi\omega/(2(n-1))) =$$

$$= (\cos^2\omega\pi + \sin^2\omega\pi)\sin(2n\pi\omega/(2(n-1)))/\sin(2\pi\omega/(2(n-1)))$$

a máme formuli (34).

Výraz $\sum \cos^2 \omega t$ rozepišme takto: $\sum \cos^2\omega t = \frac{1}{2}\sum(1+\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}(n + \sum \cos 2\omega t)$ a stejným postupem jako pro Q dostaneme formuli (35). Zcela shodně rozepíšeme: $\sum \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(n - \sum \cos 2\omega t)$ a odtud plyne formule (36). Tak jsme dokázali platnost všech tří formulí věty 7.

Rovnice (29) poskytuje možnost použít k numerickému řešení úlohy některou z iteračních metod. Z hlediska numerického výpočtu jde o úlohu, kterou lze formulovat následujícím způsobem: Máme dánu (vzorcem (29)) reálnou funkci ϱ^2 racionálního argumentu ω z intervalu $\mathcal{E} = \langle \nu_1, \nu_2 \rangle \neq \emptyset$, spojitou na celém $\mathcal{E}$, která má derivace všech řádů ve všech bodech $\omega \in \mathcal{E}$ (je tedy v $\mathcal{E}$ analytická). Máme nalézt nejmenší argument ($\tilde{\omega}^x$) ze všech argumentů (ω^x) jejích absolutních minim v $\mathcal{E}$ a hodnoty koeficientů a_0^x, a^x, b^x určených z rovnic (30) pro $\tilde{\omega}^x$.

K numerickému řešení úlohy na samočinném počítači lze užít ~~Ural 2 užil jsem~~ následující metody: Nechť $\varrho^2 \neq$ konst. pro $\omega \in \mathcal{E}$ (~~pro~~ triviální případ $\varrho^2 \equiv$ konst., $\omega \in \mathcal{E}$ zřejmě pro danou $F \in \mathfrak{M}_n$ nemůže nastat ~~béřeme podle definice $\tilde{\omega}^x = 1$~~). Zvolíme reálné h (základní krok) tak, aby pro žádné $\omega \in \mathcal{E}$ neleželo v intervalu $\langle \omega - h, \omega + h \rangle$ více nežli jedno ostré lokální minimum funkce ϱ^2 (jelikož je ϱ^2 v $\mathcal{E}$ analytickou, a není v $\mathcal{E}$ konstantní, pak všechna lokální minima v $\mathcal{E}$ budou ostrá).

Počítejme funkční hodnoty $\varrho^2(\omega)$ pro $\omega = \nu_1, \nu_1+h, \ldots, \nu_1+ih, \ldots, \nu_1+qh \in \mathcal{E}$ $(qh \leq \nu_2 - \nu_1 < (q+1)h)$ z rovnice (29). Je-li pro některé $i=0,1,\ldots,q$ splněna podmínka:

$$\varrho^2(\nu_1+(i-1)h) \geq \varrho^2(\nu_1+ih) \leq \varrho^2(\nu_1+(i+1)h), \tag{37}$$

pak můžeme říci, že v intervalu $\langle \nu_1 + (i-1)h, \nu_1 + (i+1)h \rangle$ leží ostré lokální minimum ϱ^2. Tak separujeme lokální minimum a k určení jeho funkční hodnoty a argumentu užijeme nyní prostou iteraci, metodu „čtvrcení" intervalu (viz kupř. [4], IV,3), s předem danou přesností iterace $1/\varepsilon$. Hodnota argumentu ostrého lokálního minima jest ovšem ω^x. Takto postupujeme tak dlouho, dokud $\omega \in \mathcal{E}$. Nejmenší ze všech ω^x (pro než ϱ^2 je nejmenší ze všech $\varrho^2(\omega^x)$) je hledaná charakteristická frekvence $\tilde{\omega}^x$ a jí odpovídají optimální koeficienty a_0^x, a^x, b^x.

Pokusy jsme zjistili, že pro empirické funkce s "klidným" průběhem postačuje volit $h=1/16$ pro $\omega \in \langle \nu_1, 1 \rangle$ a $h=1/3$ pro $\omega \in (1, \nu_2\rangle$.

§ 4) Příklad

Jako příklad na postupnou anharmonickou analýzu uvedeme výsledky získané na samočinném počítači Ural 2 analýzou chodu jednoho z horizontálních kyvadel registrovaného na náklonoměrné stanici Březové Hory v období od 2. srpna 1936 do 15. srpna 1937 (viz [13], [14]). Použili jsme $n=1137$, $m=8$, $\mathcal{E} = \langle 0{,}002, (n-2)/20\rangle$, $\varepsilon = \pm 10^{-2}$ a dostali jsme přibližné charakteristické periody $P_j = 379^d/\tilde{\omega}_j^x$ a parametry a_0^x, R_j^x, φ_j^x sestavené v tabulce 1.

Tabulka 1.

Průběh hodnot $\varrho_j^2 = \varrho^2(\overset{j}{T}_j, \Delta^{j-1}F)$ je patrný z obrázku 1.

Obr. 1.

Aproximace chodu získaným polynomem $\overset{8}{T}$ je nakreslena na obr. 2 spolu s průběhem $\Delta^7 F$.

Obr. 2.

Seznam literatury

[1] Ахиезер Н.И. – Лекции по теории аппроксимации (Наука, Moskva 1965)

[2] Березин И.С., Жидков Н.П. – Методы вычислений I (ГИФМЛ, Moskva 1962)

[3] Borůvka O. - Základy teorie grupoidů a grup (NČSAV, Praha 1962)

[4] Демидович Б.П., Марон И.А. – Основы вычислительной математики (český překlad, SNTL, Praha 1966)

[5] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. – Вычислительные методы линейной алгебры (český překlad, SNTL, Praha 1964)

[6] Каратаев П.И. – Некоторые сведения из функционального анализа (Применение ЭЦВМ при решении задач геофизики, ИАН СССР Novosibirsk 1963)

[7] Kašpar J. - K stanovení konstant periodického pohybu tížnice vyrovnáním (Geofysikální sborník 1960, čl.43, NČSAV, Praha 1961).

[8] Lanczos C. - Applied Analysis (ruský překlad, ГИФМЛ, Moskva 1961)

[9] Laurent P.J. - Cours de Théorie de l´Approximation (učební text Fakulty věd university v Grenoblu, Grenoble 1965).

[10] Люстерник Л.А., Соболев В.И. – Элементы функционального анализа (Наука, Moskva 1965)

[11] Мишина А.П., Проскуряков И.В. – Высшая алгебра (Наука, Moskva 1965)

[12] Munk W.H., Macdonald G.T.F. - The Rotation of the Earth (ruský překlad, МИР, Moskva 1964)

[13] Pícha J. - Ergebnisse der Gezeitenbeobachtungen der festen Erdkruste in Březové Hory in den Jahren 1936-1939 (Geofysikální sborník 1956, čl.42, NČSAV, Praha 1957)

[14] Pícha J., Skalský L. - Beitrag zum Studium des Nullpunktganges der Horizontalpendel (Studia Geophysica et Geodaetica 3, NČSAV, Praha 1958)

[15] Riesz F., Nagy B. - Leçons d'Analyse Fonctionnelle (Gautiers - Villars, Paříž 1965)

[16] Серебренников М.Г., Первозванский А.А. - Выявление скрытых периодичностей (Наука, Москва 1965)

[17] Sz. - Nagy B. - Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions (Akadémiai Kiadó, Budapešť 1964).

[18] Vancl J., Čuřík F. - Technický průvodce (Česká matice technická, Praha 1921)