

# Evaluación del Efecto Atmosférico Directo en el Área de Influencia de la Solución Geoidal Mexicana

Antonio Hernández Navarro<sup>1</sup>  
Petr Vaníček<sup>2</sup>  
Marcelo Santos<sup>3</sup>  
Robert Tenzer<sup>4</sup>

## Resumen

La determinación del geoide a nivel centimétrico, requiere la consideración de una serie de efectos, que de no cuantificarse no permitirán lograr el objetivo. Uno de estos efectos es el producido por la atmósfera existente por encima de la superficie terrestre, ya que al tener masa, y por lo tanto densidad, no permite cumplir con la condición de armonicidad requerida por la ecuación de Laplace. En esta contribución se presenta la evaluación del Efecto Atmosférico Directo, realizándose la evaluación numérica en el área de influencia de la solución geoidal mexicana.

## Abstract

The geoid determination to centimetric level, required take in account some effects, which if not quantified don't allow to reach the objective. One of these effects is the produced by the existing atmosphere above Earth surface, because it has masses, and therefore density, the required harmonicity condition by Laplace's equation not be fulfilled. This paper shows the evaluation for the Direct Atmospheric Effect, accomplished the numerical evaluation at influence area of the geoidal Mexican solution.

## Introducción

Gauss [1828] definió una superficie equipotencial de la Tierra que aproxima al nivel medio del mar de manera cercana, en su estado no perturbado, y posteriormente *Listring* [1873] bautizó esta superficie con el nombre de geoide. Esta superficie de referencia, ha cobrado gran relevancia en los últimos años en el trabajo geodésico, y tanto investigadores, como agencias cartográficas nacionales dedican grandes esfuerzos para la determinación precisa de esta superficie.

El proceso para generar un modelo local del geoide requiere, además de datos de calidad de diversos tipos, la consideración de una serie de efectos, que si bien pueden parecer pequeños en cuanto a su magnitud, tienen gran influencia en los resultados finales. En la actualidad existen distintos esquemas para el cálculo preciso del geoide, entre ellos el propuesto por el Dr. Petr Vaníček y su equipo de colaboradores de la Universidad de New Brunswick, así como investigadores de otras partes del mundo, el cual presenta una alternativa viable para la determinación de esta superficie, que al menos desde el punto de vista teórico, permitiendo alcanzar exactitudes centimétricas. De manera resumida la Teoría de Stokes-Helmert para la determinación precisa del geoide, materializada a través del software de la Universidad de New Brunswick llamado SHGeo [Tenzer y Jának, 2002], puede condensarse en los siguientes pasos:

---

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. Dirección General Adjunta de Geomática. Av. Héroe de Nacozari # 2301 Sur, Frac. Jardines del Parque, Aguascalientes, Ags., 20270 MÉXICO. email: antonio.hernandez@inegi.gob.mx

<sup>2</sup> Department of Geodesy and Geomatics Engineering. University of New Brunswick. P. O. Box 4400, Fredericton, NB, Canada E3B 5A3. email: vanicek@unb.ca

<sup>3</sup> email: msantos@unb.ca

<sup>4</sup> email: tenzer@unb.ca

1. Formulación del problema geodésico de valor de frontera sobre la superficie de la Tierra
2. Evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie de la Tierra.
3. La continuación descendente de las anomalías de gravedad de Helmert de la superficie terrestre al geode.
4. La integración de Stokes (solución de Stokes al problema geodésico de valor de frontera).
5. Transformación de las alturas geoidales del espacio de Helmert al espacio real.

Para una descripción más amplia de la teoría Stokes-Helmert, el lector interesado puede referirse al trabajo de *Vaniček y Martinec* [1994], *Vaniček et al.* [1999], *Vaniček y Janák* [2001], o el de *Tenzer y Janák* [2002]. En dichos trabajos podrá encontrar gran cantidad de referencias sobre el tema, así como conocer la evolución que esta teoría ha tenido desde su primer planteamiento.

Uno de estos efectos, es el llamado *Efecto Atmosférico Directo*, o DAE por sus siglas en inglés, el cual es tema central de esta contribución, con propósito de ilustrar su magnitud se consideró el área de influencia de la solución geoidal mexicana, la cual, desde luego, se basa en la teoría Stokes-Helmert para la determinación precisa del geode.

### Formulación del problema

El potencial de la gravedad sobre el geode se indica como  $W_0(r, \Omega) = \text{const.}$ . En la relación anterior, la posición se describe por medio de las coordenadas esféricas  $\phi$  y  $\lambda$ ;  $\Omega = (\phi, \lambda)$ , así como el radio geocéntrico  $r$ ;  $r \in \mathfrak{R}^+ (\mathfrak{R}^+ \in \langle 0, +\infty \rangle)$ . Introduciendo un potencial de gravedad normal  $U(r, \Omega)$  generado por un elipsoide de revolución, y seleccionándose que el valor del potencial de gravedad normal  $U_0$  del elipsoide geocéntrico sea igual al potencial de la Tierra sobre el geode  $U_0 = W_0$ , se tiene que la diferencia del potencial de gravedad  $W(r, \Omega)$  y el potencial de gravedad normal  $U(r, \Omega)$  define al potencial perturbador  $T(r, \Omega)$ ,

$$T(r, \Omega) = W(r, \Omega) - U(r, \Omega) \quad (1)$$

En principio  $T(r, \Omega)$  debe ser armónico y satisfacer la ecuación de Laplace [Kellogg, 1929],

$$\nabla^2 T(r, \Omega) = 0 \quad (2)$$

Para cumplir lo anterior se requiere desprestigiar la atracción de las masas atmosféricas o cuantificarlas para su posterior eliminación, y con ello cumplir la condición para que sea armónico fuera de la superficie terrestre.

Una vez que se cuenta con  $T(r, \Omega)$ , el potencial de la gravedad  $W(r, \Omega)$  puede obtenerse para cualquier punto sobre la superficie terrestre, simplemente añadiendo el valor de  $U(r, \Omega)$ , el cual se puede calcular con los modelos existentes; esto es, la fórmula internacional de gravedad propuesta por la Asociación Internacional de Geodesia de 1980 [IAG, 1980]. Si se requiere conocer la gravedad sobre el geode, como es el caso para su determinación, se deberá de considerar una corrección adicional producida por las masas existentes entre el geode y la superficie del terreno. Una vez que se cuenta con  $T(r, \Omega)$  sobre el geode, la separación vertical entre el elipsoide de referencia y el geode, altura geoidal, se puede determinar a través de la fórmula de Bruns [1878]

$$N(\Omega) = \frac{T(r_g(\Omega))}{\gamma_0(\Omega)} \quad (3)$$

En al que  $T(r_g(\Omega))$  es el potencial perturbador sobre el geode, y  $\gamma_0(\Omega)$  es la gravedad normal sobre el elipsoide geocéntrico de referencia.

Como se mencionó  $T(r, \Omega)$  no satisface la condición de armonicidad establecida en la ecuación de Laplace dentro de las masas atmosféricas y topográficas, por lo que para satisfacer la condición éstas se deben remover o condensar sobre el geoide o por debajo de él estas masas. En el caso de la teoría Stokes-Helmert para la determinación precisa del geoide se considera el segundo método de condensación de Helmert [Martinec et al., 1993], en el que las masas atmosféricas y topográficas se condensan directamente sobre el geoide.

Cuando las masas atmosféricas y topográficas se condensan como una capa infinitesimal localizada sobre el geoide, el campo de gravedad terrestre cambia ligeramente, obteniéndose con dicha condensación la transformación del espacio real al espacio de Helmert. Cabe comentar que todas las cantidades referidas al espacio de Helmert se representarán por un superíndice H. Así pues, el potencial de gravedad en el espacio de Helmert  $W^H(r, \Omega)$  está definido como [Novák, 2000],

$$W^H(r, \Omega) = W(r, \Omega) - \delta V^t(r, \Omega) - \delta V^a(r, \Omega) \tag{4}$$

En la ecuación (4) se representa el potencial residual topográfico  $\delta V^t(r, \Omega)$  definido como la diferencia del potencial gravitacional de las masas topográficas  $V^t(r, \Omega)$  y el potencial de las masas topográficas condensadas  $V^{ct}(r, \Omega)$  [Novák, 2000],

$$\delta V^t(r, \Omega) = V^t(r, \Omega) - V^{ct}(r, \Omega) \tag{5}$$

De manera similar, el potencial residual atmosférico  $\delta V^a(r, \Omega)$  se define como la diferencia del potencial gravitacional de las masas atmosféricas  $V^a(r, \Omega)$  y el potencial gravitacional de las masas atmosféricas condensadas  $V^{ca}(r, \Omega)$  [Novák, 2000],

$$\delta V^a(r, \Omega) = V^a(r, \Omega) - V^{ca}(r, \Omega) \tag{6}$$

Restando a la ecuación (4) el potencial de gravedad normal  $U(r, \Omega)$ , se obtiene el potencial perturbador en el espacio de Helmert  $T^H(r, \Omega)$

$$T^H(r, \Omega) = W^H(r, \Omega) - U(r, \Omega) \tag{7}$$

En virtud de que en el espacio de Helmert se han condensado las masas atmosféricas y topográficas sobre el geoide, el potencial perturbador de Helmert  $T^H(r, \Omega)$  es armónico sobre el geoide, y con ello se satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T^H(r, \Omega) = 0 \tag{8}$$

### Efecto atmosférico en el potencial

El potencial residual producido por la atmósfera, definido por la ecuación (6), como la diferencia del potencial de las masas atmosféricas y el potencial gravitacional de las masas atmosféricas condensadas, puede calcularse, para el primer potencial, usando la integral de volumen de Newton [Novák, 2000, Tenzer et al., 2003],

$$V^a(r, \Omega) = G \iiint_{\Omega} \int_{r=R+H^0(\Omega')}^{r^a} \rho^a(r, \Omega')^{-1} [r, \psi(\Omega, \Omega'), r']^{-2} dr' d\Omega' \tag{9}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\Omega$  es el ángulo sólido completo en coordenadas esféricas,  $r^a$  el límite superior de la atmósfera en el que la densidad se vuelve despreciable,  $R$  el radio promedio de la Tierra,  $H^o$  la altura ortométrica,  $\rho^a$  es la densidad de las masa atmosféricas, y  $\Gamma^{-1}$  kernel de la integral de Newton.

Para determinar el segundo potencial se emplea la integral de superficie de Newton [Novák, 2000, Tenzer et al., 2003],

$$V^{ac}(r, \Omega) = GR^2 \iint_{\Omega} \sigma^a(\Omega') \Gamma^{-1}[r, \psi(\Omega, \Omega'), R] d\Omega' \quad (10)$$

donde  $\sigma^a$  es densidad superficial de la capa atmosférica condensada y las otras variables tienen el mismo significado.

La densidad atmosférica  $\rho^a$  como una función de la posición  $(r, \Omega)$  juega un papel importante en la evaluación numérica de los efectos atmosféricos. Entre los distintos modelos atmosféricos existentes, el más frecuentemente empleado es el United States Standard Atmosphere de 1976,

$$\rho^a(H) = \frac{\mu P(H)}{\kappa T(H)} \quad (11)$$

Cuyos valores para la constante universal de gases  $\kappa$ , el peso molecular promedio de las masas atmosféricas referidas al nivel del mar  $\mu$ , la presión atmosférica  $P$  y la escala molecular de temperaturas de la atmósfera  $T$ , se presenta en la Tabla 1.

Parámetro	Símbolo	Magnitud	Unidades
Constante universal de gases	$\kappa$	8314.32	$\text{N m kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Peso molecular medio	$\mu$	28.9644	$\text{kg kmol}^{-1}$
Presión del aire al nivel del mar	$P$	101325	$\text{N m}^{-2}$
Temperatura del aire al nivel del mar	$T$	288.15	$\text{K}$

**Tabla 1.** Constantes del United States Standard Atmosphere de 1976

### Efecto Atmosférico Directo

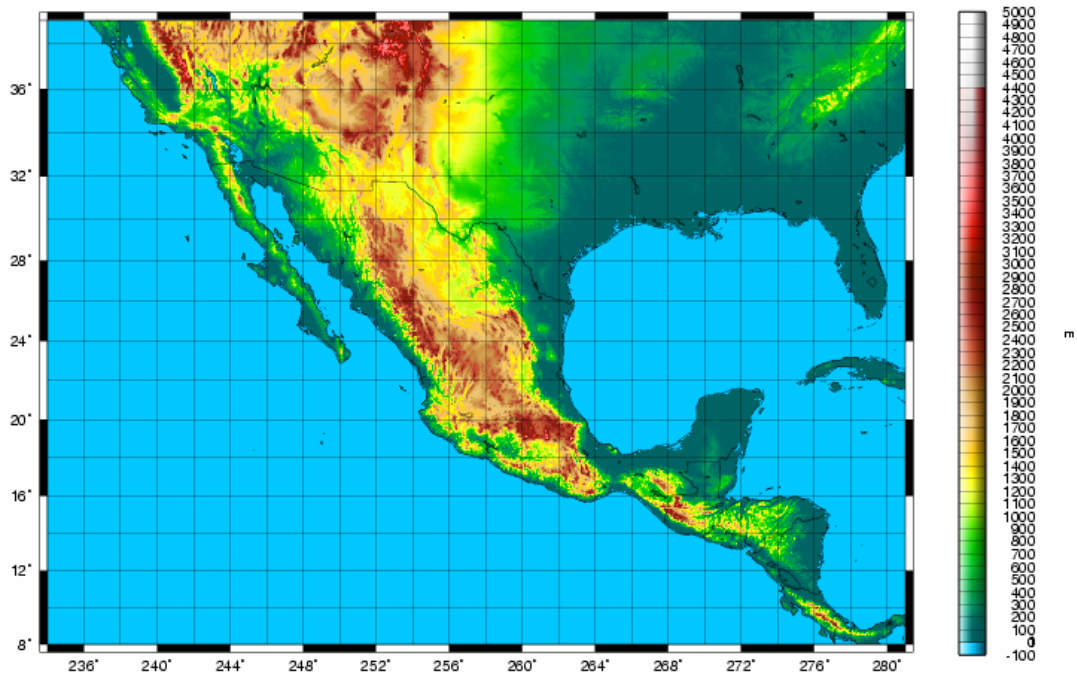
Finalmente, el DAE se define como la derivada radial del potencial gravitacional residual  $\delta V^a(r, \Omega)$  de las masas atmosféricas referidas a la superficie terrestre [Vaniček et al. 1999, Novák, 2000, Tenzer et al., 2003],

$$\text{DAE} = \left. \frac{\partial \delta V^a(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=R+H^o(\Omega)} = \left. \frac{\partial V^a(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=R+H^o(\Omega)} - \left. \frac{\partial \delta V^{ac}(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=R+H^o(\Omega)} \quad (12)$$

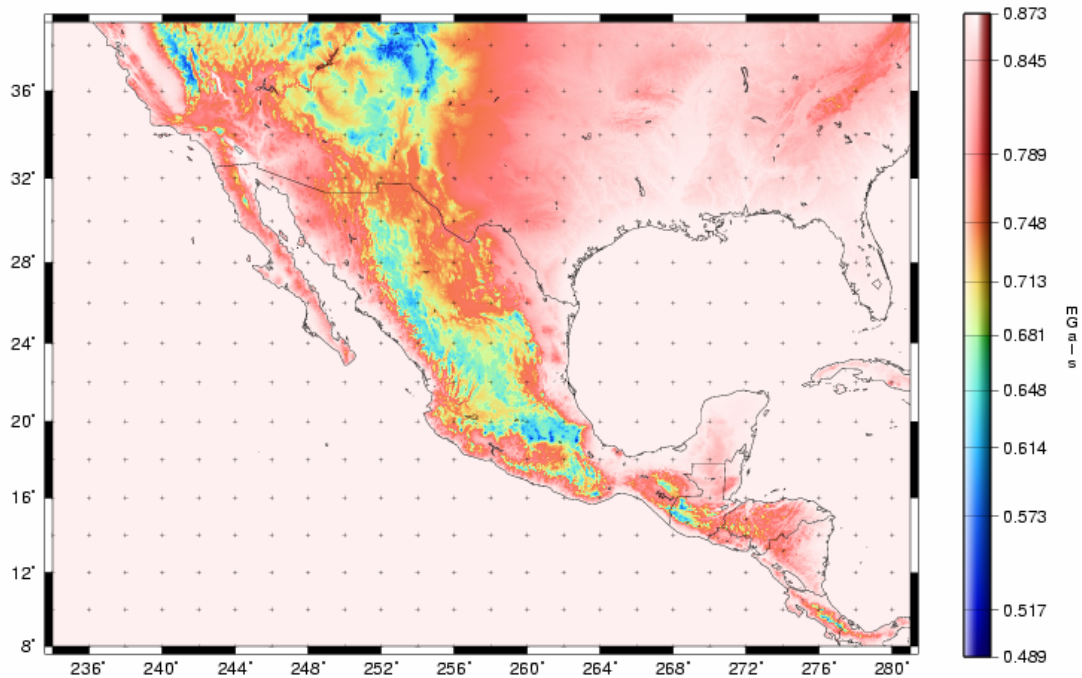
### Investigación Numérica

Con objeto de ilustrar la magnitud del DAE, se seleccionó el área de influencia de la solución geoidal centimétrica para la república mexicana, la cual cubre una región comprendida entre los  $8^\circ$  de latitud norte a  $39^\circ$  de latitud norte y de  $234^\circ$  de longitud este a  $281^\circ$  de longitud este, generándose una malla regular de 150 segundos de arco, tanto en latitud como longitud. Dado que el insumo básico para el cálculo del DAE son alturas ortométricas en el área de interés, primeramente se generó una malla regular con estos valores a partir del modelo global GTOPO30 conteniendo 744 renglones por 1128 columnas, la representación gráfica de este conjunto de elevaciones se muestra en la figura 1. El DAE calculado para la región de interés se muestra en la figura 2. En la tabla 2 se presenta el resumen estadístico para el DAE en el área de cómputo.

Debe puntualizarse que el efecto atmosférico directo para esta área, está entre 0.489 y 0.873 mGals. Considerando el gradiente de aire libre [Heiskanen y Moritz, 1969], estas variaciones representan una variación en altura entre 15.1 y 26.9 centímetros.



**Figura 1.** Alturas promedio GTOPO30, remuestreadas a 150 segundos.



**Figura 2.** Efecto Atmosférico Directo [mGals].

Mínimo	0.489 mGals	0.151 m
Máximo	0.873 mGals	0.269 m
Rango	0.384 mGals	0.119 m
Media	0.837 mGals	0.258 m
RMS	0.839 mGals	0.259 m
Desviación estándar	0.056 mGals	0.017 m

**Tabla 2.** Resumen estadístico

## Conclusiones

De la tabla 2 se desprende con facilidad que la consideración del efecto atmosférico directo en la determinación precisa del geode puede inducir mejoras significativamente en la obtención de un geode a nivel centimétrico, ya que su contribución promedio en la región de análisis llega a ser relativamente grande.

De la comparación de las figuras 1 y 2, se desprende como resulta obvio, la gran dependencia que existe de este efecto en función del modelo digital de elevación que se utilice, ya que los valores máximos se presentan en las áreas marinas, altura ortométrica igual a cero, mientras que los valores mínimos se encuentran en las regiones montañosas.

## Referencias

- Bruns, H., (1878). Die Figur der Erde. Berlin, Publ. Preuss. Geod. Inst.
- Gauss, C.F., (1828). Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector. Vanderschoeck und Ruprecht, Göttingen.
- Heiskanen, W. y H. Moritz, (1967), Physical geodesy. Freeman. San Francisco, USA.
- IAG, 1980, The Geodesist's Handbook, Ed. I.I. Mueller, *Bulletin Géodésique* 54(3).
- Kellogg O.D., (1929). Foundations of potential theory. Springer. Berlin.
- Listing, J.B., (1873). Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der Köning. Göttingen VLG der Dietrichschen Buchhandlung.
- Martinec, Z., C. Matyska, W.E. Grafarend, P. Vaníček, (1993). On Helmert's 2nd condensation method. *Manuscripta Geodaetica*, No.18. Springer.
- Novák, P., (2000). Evaluation of gravity Data for the Stokes-Helmert Solution to the Geodetic Boundary-Value Problem. Ph.D. dissertation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 207, Universidad de New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canadá, 133 pp.
- Tenzer, R. y J. Janák, (2002). Stokes-Helmert Scheme for Precise Geoid Determination. *Revista Cartográfica* 74-75, pp.135-145. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, D.F., México.
- Tenzer, R., P. Novák, J. Janák, J. Huang, M. Najafi-Alamdari, P. Vajda, y M. Santos, (2003). A Review of the UNB Approach for Precise Geoid Determination Based on the Stokes-Helmert Method. En *Honoring the Academic Life of Petr Vaníček*, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report 218. Universidad de New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canadá.
- Vaníček, P. y Z. Martinec, (1994). The Stokes-Helmert Scheme for the Evaluation of a Precise Geoid. *Manuscripta Geodaetica*, No. 19.
- Vaníček, P., J. Huang, P. Novák, S.D. Pagiatakis, M. Véronneau, Z. Martinec, W.E: Featherstone, (1999). Determination of the Boundary Values for the Stokes-Helmert Problem, *Journal of Geodesy*, Vol. 73, Springer.
- Vaníček, P. y J. Janák, (2001). The UNB technique for precise geoid determination. Presented at CGU annual meeting, Banff, Mayo 26, 2000.