

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CARTOGRÁFICA

**ESTABILIDADE
DAS
ESTRUTURAS GEODÉSICAS**

Marcelo Carvalho dos Santos, *Ph.D.*

CURITIBA
1999

© Marcelo Carvalho dos Santos

Engenheiro Cartógrafo
Mestre em Geofísica
Ph.D. em Geodésia e Engenharia Geomática
Professor Adjunto do Departamento de Geomática
Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal 19001 – CEP 81531-990, Curitiba – PR
e-mail: mcsantos@geoc.ufpr.br

Catálogo na fonte
Selma Regina Ramalho Conte – CRB – 9/888

Santos, Marcelo Carvalho dos
Estabilidade das estruturas geodésicas / Marcelo Carvalho dos
Santos. -- Curitiba : UFPR/Setor de Ciências da Terra, 1999.
79p. : il.

Inclui anexo e bibliografia

1. Geodésia. 2. Geodésia – Deformações. 3. Mínimos
quadrados.

I. Título.

TERMO LIVRE: Redes geodésicas. Otimização e Pré-análise.

526.1 – CCD20

Impressão: Imprensa Universitária da UFPR

Página em branco.

APRESENTAÇÃO

O presente texto destina-se como material de apoio para a disciplina *Estabilidade das Estruturas Geodésicas*, do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica, Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná.

Este texto está registrado junto ao Escritório de Direitos Autorais da Fundação Biblioteca Nacional, Ministério da Cultura, Nº do Registro 191.840, Livro 328, Folha 496. Qualquer citação ao presente texto deve ser feita, seguindo-se as normas da ABNT, como:

Santos, M. C. Estabilidade das Estruturas Geodésicas, Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 1999, 79 pp.

SUMÁRIO

Apresentação	iv
Prefácio	vi
1. Introdução	1
2. Conceitos básicos sobre Mecânica dos Materiais	6
2.1. Princípio básico	6
2.2. Tensão e Deformação	7
2.3. Exercícios propostos	30
3. Aplicação da Mecânica dos Materiais na Geodésia	34
3.1. Determinação de parâmetros de deformação	34
3.2. Estado plano de tensões – análise das tensões e deformações	44
3.3. Pré-análise e otimização de redes geodésicas	55
3.4. Exercícios propostos	64
Referências Bibliográficas	68
Anexo A	72

PREFÁCIO

O estudo da matéria Resistência dos Materiais no curso de Engenharia Cartográfica da UFPR era marcado por uma ênfase, quanto às aplicações, no domínio da Engenharia Civil. Contudo, o conteúdo desta matéria permite que também sejam feitas aplicações diretas no domínio da Engenharia Cartográfica. E este fato foi o motivador da criação da disciplina Estabilidade das Estruturas Geodésicas, no âmbito do Departamento de Geomática.

A idéia desta disciplina surgiu da discussão relativa às novas diretrizes curriculares para o Curso de Engenharia Cartográfica, em 1997, durante uma reunião do grupo de estudo, formado pelas professoras Dulce Machado Bueno e Luciene Stamato Delazari Skroch, pelos professores Antônio José Berutti Vieira e Henrique Firkowski, e por mim. Após uma análise do conteúdo da matéria Resistência dos Materiais, ficou evidente que a matéria em muito se valorizaria se fossem incluídos exemplos de aplicações na área da Engenharia Cartográfica, mais especificamente, de Geodésia. Tive a satisfação de ver esta proposta aceita pelos demais membros do grupo de estudo. A idéia da criação de uma nova disciplina, com este novo enfoque ganhou vulto, vencendo as resistências iniciais. O nome da disciplina, Estabilidade das Estruturas Geodésicas, foi uma sugestão do professor Sílvio Rogério Correia de Freitas, um dos que apoiaram a idéia.

A implementação da idéia original tem se mostrado um sucesso, o que mostra que a nossa motivação em criá-la era correta, apesar dos percalços.

Este texto apresenta o material didático, da parte relativa às aplicações geodésicas, usado na disciplina Estabilidade das Estruturas Geodésicas, no ano de 1998. O texto, obviamente, não esgota o assunto. Contudo, ao tomar a decisão de publicá-lo, o faço com dois intuitos. Em primeiro lugar, fornecer aos alunos da disciplina um texto de apoio em português. Em segundo lugar, procurar mostrar aos demais colegas dos outros cursos de Engenharia Cartográfica uma iniciativa capaz de satisfazer normas curriculares ao mesmo tempo em que se motiva os alunos para aplicações mais próximas do futuro dia-a-dia profissional.

Deve-se deixar claro que os assuntos tratados neste texto não totalizam o conteúdo programático da disciplina. Os assuntos referentes a Torção, Flexão e Flambagem devem ser enfocados usando-se alguns dos vários livros textos existentes.

Deve-se ainda deixar registrado meus agradecimentos a Luciana Helena de Araújo, estudante do quinto ano de Engenharia Cartográfica da UFPR, e monitora da primeira disciplina de Estabilidade das Estruturas Geodésicas (ano acadêmico de 1998), que colaborou com grande parte do trabalho de editoração deste livro, incluindo o desenho de muitas das figuras.

Prof. Marcelo Carvalho dos Santos, *Ph.D.*

Curitiba, 1999

1. INTRODUÇÃO

Define-se Mecânica dos Materiais, ou como mais comumente chamada, Resistência dos Materiais, como sendo um capítulo da mecânica dos corpos sólidos que trata do equilíbrio dos corpos considerando os efeitos internos provocados por forças externas [Popov, 1976]. Possui inúmeras aplicações na Engenharia, tradicionalmente ligadas a solução de problemas de dimensionamento e verificação de segurança de peças e estruturas.

A Mecânica dos Materiais trata do comportamento de corpos sujeitos a forças externas. Este comportamento depende das leis fundamentais da mecânica Newtoniana que governam o equilíbrio das forças, como também das características físicas dos materiais que compõem o corpo. Informações destas características são determinadas em laboratório, onde os materiais são testados sujeitos a forças conhecidas e controladas, e o comportamento resultante observado visando a detecção de fraturas, deformações, etc. O enfoque aqui dado, lida com a investigação matemática ao invés de experimentações laboratoriais.

O estudo da Mecânica dos Materiais envolve corpos, normalmente referidos como *peças* ou *elementos resistentes*. Estes corpos podem ser definidos como sendo todo corpo capaz de receber e transmitir forças. Como exemplos de peças ou elementos resistentes pode-se citar:

- (a) BARRA: é o corpo que apresenta uma dimensão bem maior que as outras duas. Esta dimensão denomina-se comprimento da barra (ver Figuras 1.1 e 1.2).

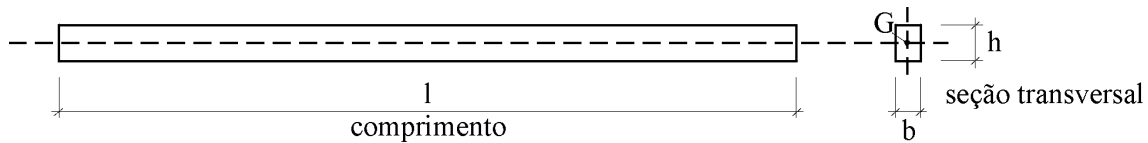


Figura 1.1 – Barra.

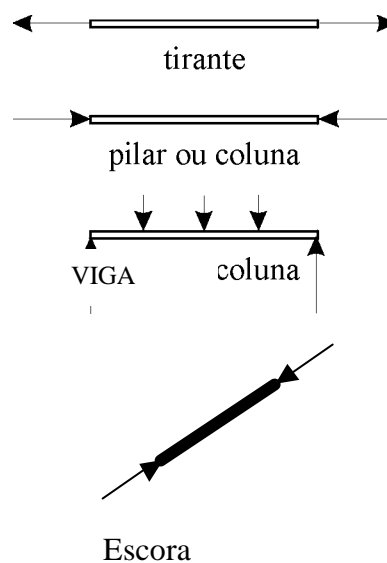


Figura 1.2 – Exemplos de barra.

- (b) **PLACA** ou **CHAPA**: é a peça que apresenta uma das dimensões muito menor do que as demais. Esta dimensão denomina-se espessura da placa.

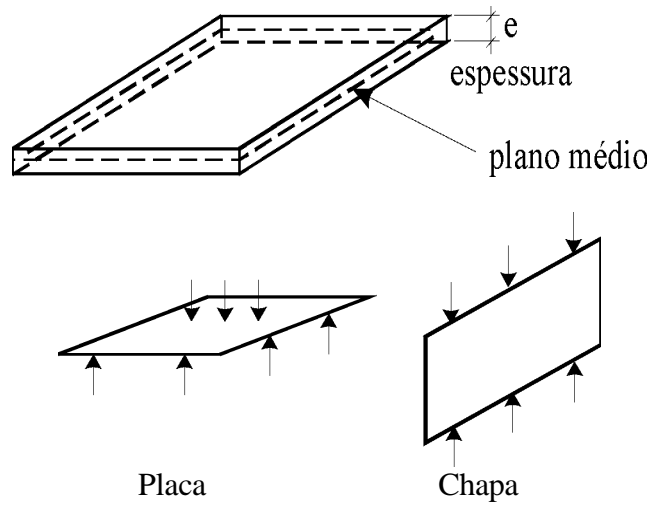


Figura 1.3 – Placa ou Chapa.

- (c) **CASCA**: é a peça que apresenta uma das dimensões muito maior que as demais e sua superfície é curva.

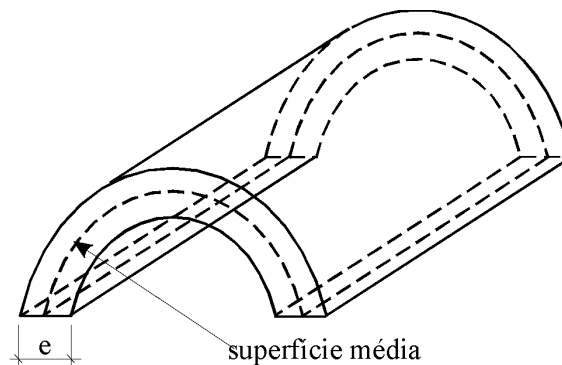


Figura 1.4 – Casca.

- (d) **BLOCO**: é o elemento resistente no qual as 3 dimensões apresentam a mesma ordem de grandeza.

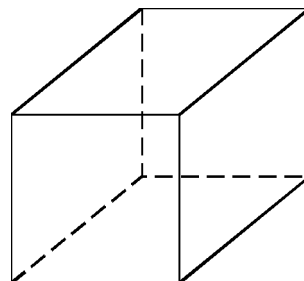


Figura 1.5 – Bloco.

O conceito de peça pode ser estendido a corpos, ou estruturas, de maior proporção, como estruturas feitas pelo Homem, tais como, pontes, barragens, ou até mesmo partes do próprio planeta Terra, tais como placas tectônicas e regiões sujeitas a vulcanismo, a soerguimento pós-glacial, e a subsidência [Santos, 1990].

Na conceituação básica da Mecânica dos Materiais, os corpos ou peças, tais como as indicadas nas Figuras 1.1 a 1.5, sob a ação de forças externas, estão sujeitos a deformações de diversas naturezas. A mesma conceituação básica pode ser aplicada às estruturas de maior proporção, mencionadas acima, o que é feito em estudos dentro das áreas da Geodésia e Geodinâmica. Como exemplo de deformações, pode-se citar aquelas provocadas pelo choque entre duas placas tectônicas, as oriundas do movimento de falhas geológicas (Figuras 1.6 e 1.7) ou aquelas provocadas pelo enchimento de barragens (Figuras 1.8). Deformações provocadas pelo choque entre duas placas tectônicas são indicadas na Figura 1.6, que mostra uma situação que existe entre o choque da Placa de Nazca com a placa Sul-Americana. A placa oceânica (Nazca) encontra-se empurrando e penetrando por sob a placa continental (Sul-Americana). A placa continental, por seu turno, está sendo levantada, criando a cordilheira dos Andes. Este encontro entre as placas resulta em terremotos, rápidos movimentos verticais da crosta e vulcanismo associado. Ao longo do encontro entre as placas encontra-se uma fossa oceânica, resultante da subducção da placa oceânica. Outros tipos de limites entre placas existem. A Figura 1.7 mostra os três tipos básicos de falhas geológicas, a saber, falha transcorrente, falha normal e falha inversa, cujos movimentos estão geralmente associados a sismos. A Figura 1.8 mostra possíveis deformações associadas ao enchimento do reservatório de uma grande barragem. Nota-se a existência de movimento vertical (subsidência) devido a carga provocada pela massa d'água após o enchimento do reservatório (linha mais grossa), bem como movimentos horizontais da própria estrutura da barragem, devido a pressão da massa d'água nesta estrutura.

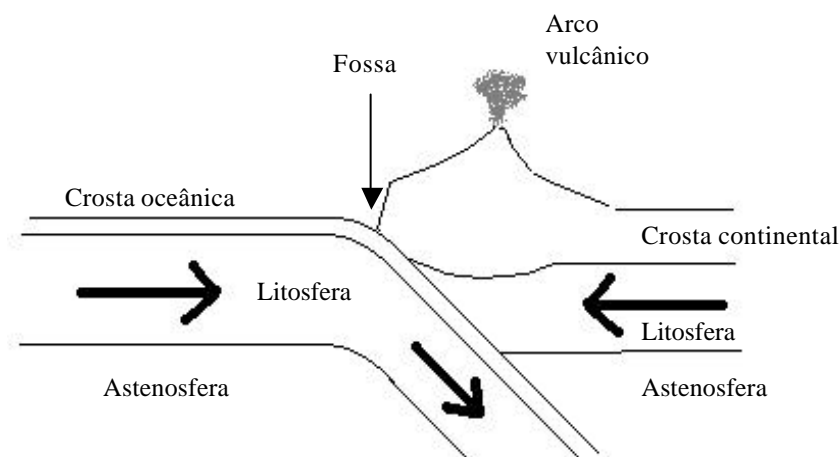


Figura 1.6 – Convergência entre placa oceânica e continental.

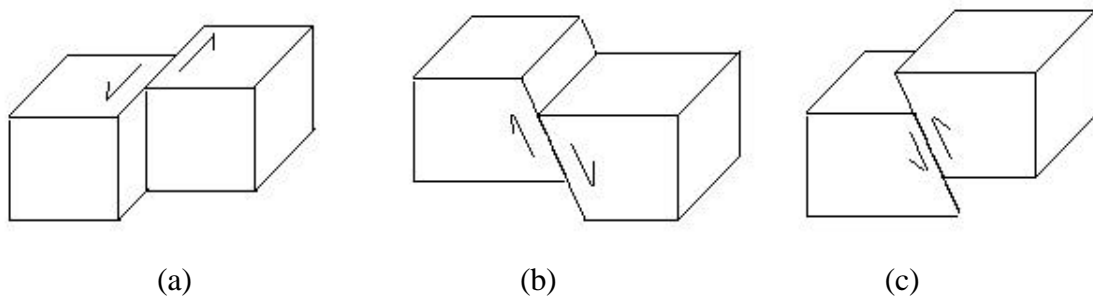


Figura 1.7 – Falhas geológicas: (a) transcorrente; (b) normal; (c) inversa.

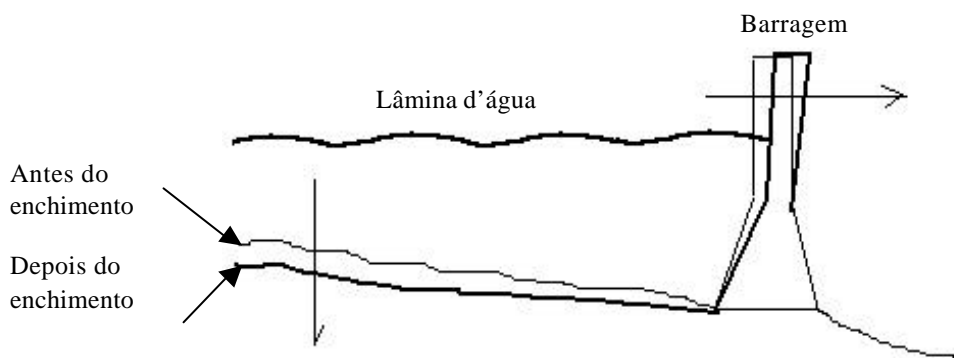


Figura 1.8 – Vista esquemática das deformações, verticais e horizontais, decorrentes do enchimento do reservatório de uma grande barragem.

Deformações podem ser classificadas como sendo de escala local, regional, continental ou global, dependendo da sua extensão. *Deformações locais* podem incluir aquelas que ocorrem em estruturas feitas pelo Homem, ou por ele modificadas, como áreas de extração de água, petróleo, ou minérios. *Deformações regionais* ou *continentais*, típicas, são aquelas associadas aos limites entre placas tectônicas, como no monitoramento de deformações devido ao atrito provocado pelo movimento entre duas delas, aos movimentos precursores de terremotos e aos associados a vulcanismo. Pode-se citar como exemplo de *deformações globais* aquelas provocadas pelo movimento relativo entre as placas tectônicas, movimento do polo instantâneo e variação na rotação da Terra. O enfoque dado neste texto está relacionado ao monitoramento de deformações de natureza local.

Do ponto de vista geodésico, dois propósitos podem ser considerados como os principais. Inicialmente, a própria detecção, análise e monitoramento de deformações, quer seja em aspectos locais, regionais ou globais. E as mesmas técnicas utilizadas para a análise de deformações podem ser empregadas na análise da robustez de redes geodésicas. Um segundo propósito diz respeito ao estabelecimento de redes geodésicas, incluindo-se aí aquelas com o propósito de controle de deformações. Aqui, inclui-se o que se conhece na literatura geodésica como otimização de redes geodésicas,

envolvendo a chamada pré-análise (verificação de erros ou efeitos geométricos no posicionamento) e a integração de observações heterogêneas.

Neste curso emprega-se o termo *estrutura geodésica*. Uma estrutura geodésica constitui-se numa malha de vértices, monumentados no terreno, conectados entre si através de observações. Os conceitos inerentes a Mecânica dos Materiais podem ser aplicados ao estudo da estabilidade de uma estrutura geodésica. No caso da estrutura geodésica ter o propósito de controle de deformações, os deslocamentos dos vértices podem ser diretamente correlacionados a deslocamentos do corpo sob investigação. No caso no qual o interesse reside no conhecimento da estabilidade da estrutura em si, busca-se saber o quanto os erros sistemáticos que afetam as observações, estão influenciando na forma da rede geodésica.

Este texto foi escrito com a finalidade de servir como base para a disciplina Estabilidade das Estruturas Geodésicas, do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica da Universidade Federal do Paraná. Para tal, ele se atém aos conceitos da Mecânica dos Materiais que são aplicados na Geodésia, notadamente Tensão e Deformação. Os demais itens do conteúdo da disciplina, relacionados a Resistência dos Materiais, devem ter como referência a extensa literatura existente, por exemplo, *Beer & Johnston* [1989].

O presente texto está estruturado em 3 capítulos. O capítulo 2 trata dos conceitos básicos da Mecânica dos Materiais relativos a Tensão e Deformação. O Capítulo 3 contém a aplicação dos conceitos da Mecânica dos Materiais na Geodésia, incluindo a determinação dos parâmetros de deformação, análise de erros e otimização de redes geodésicas. Os dois capítulos contém exercícios resolvidos e propostos.

2. CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA DOS MATERIAIS

2.1. Princípio básico

Tem-se como um princípio básico da Mecânica dos Materiais o fato de que toda parte de um corpo em equilíbrio também está em equilíbrio. Deste modo, pode-se aplicar as equações da estática. Para o parágrafo que segue, considere a Figura 2.1 abaixo.

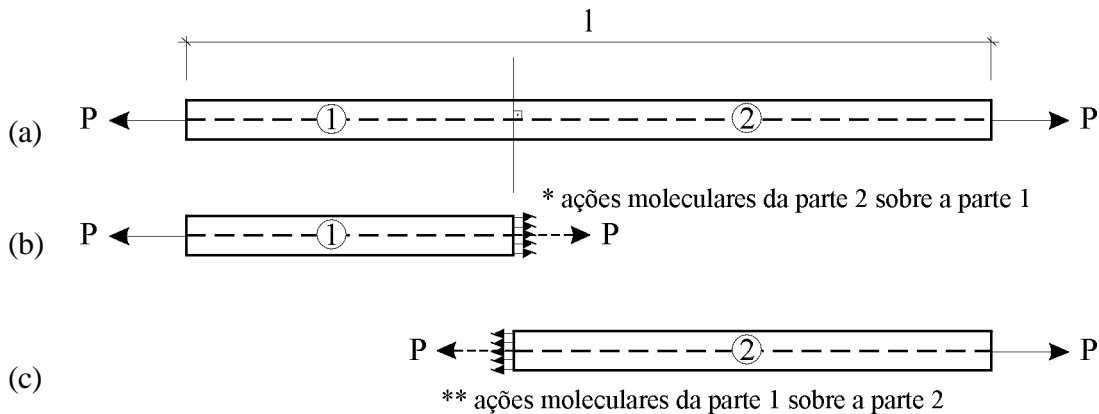


Figura 2.1 – Método das Seções.

Um dos principais problemas da Mecânica dos Materiais é a investigação da resistência interna de um corpo, ou seja, a natureza das forças estabelecidas dentro deste corpo, de modo a equilibrar o efeito das forças externas aplicadas sobre ele. Para este estudo, utiliza-se um processo conhecido como Método das Seções, no qual um corpo sólido, como mostrado na Figura 2.1(a), é separado em duas partes distintas, como visto nas Figuras 2.1(b) e 2.1(c). A Figura 2.1(a) mostra que as forças atuando sobre o corpo satisfazem as equações do equilíbrio estático, e são todas representadas. Para se determinar as forças internas provocadas pela ação das forças externas, o que é uma das principais preocupações, uma seção é aplicada através do corpo, separando-o em duas partes. Se o corpo como um todo está em equilíbrio, qualquer de suas partes deve também estar. Para tal, algumas das forças necessárias para manter o equilíbrio deve atuar na seção de corte, de modo que “as forças externas aplicadas em um lado de um corte arbitrário devem ser equilibradas por forças internas desenvolvidas no corte”. Ou, resumindo, as forças externas são equilibradas pelas forças internas.

O método das seções pode ser aplicado a corpos em equilíbrio estático e em equilíbrio dinâmico. Este último caso pode ser reduzido ao primeiro do seguinte modo, conhecido como Princípio d’Alembert [Popov, 1976]:

- Calcular a aceleração a do corpo;
- Calcular a força F , conhecendo a massa m do corpo, aplicando $F = m.a$;
- Aplicar a força ao corpo, no seu centro de massa, na direção oposta a aceleração.

Geralmente, algumas hipóteses simplificadoras são feitas. Inicialmente, aquelas relativas ao material são:

- Material isotrópico: é o material que apresenta as mesmas propriedades mecânicas em qualquer direção que se considere. Alguns materiais, mais notadamente cristais,

possuem módulo de elasticidade diferentes em direções diferentes com respeito a seus planos cristalográficos. Tais materiais, possuindo diferentes propriedades físicas em direções diferentes, são chamados de anisotrópicos (tais materiais estão excluídos neste estudo introdutório de Mecânica dos Materiais). A maioria dos materiais utilizadas em engenharia consistem de um grande número de cristais orientados aleatoriamente. Devido a esta orientação aleatória dos cristais, as propriedades dos materiais tornam-se parecidas em qualquer direção. Tais materiais são chamados isotrópicos [Popov, 1976]. Como exemplo de material isotrópico, pode-se citar o aço.

- (b) Material homogêneo: é o material que apresenta, numa dada direção, as mesmas propriedades mecânicas em qualquer ponto, isto é, quando suas várias propriedades mecânicas são independentes do ponto considerado [Beer & Johnston, 1989]. Como exemplo de material homogêneo, pode-se citar o aço e a madeira.
- (c) corpo deve ser contínuo. Um corpo contínuo é aquele no qual a matéria é distribuída continuamente em todo o seu volume. A Figura 2.2 mostra exemplos de corpos descontínuos:

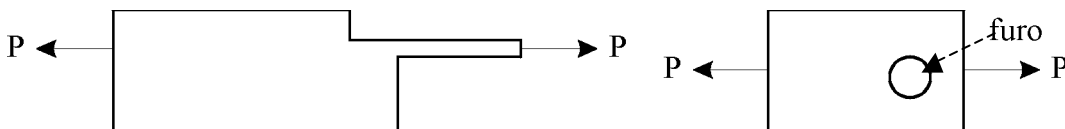


Figura 2.2 – Corpos descontínuos.

- (d) Os deslocamentos sofridos pelo corpo por efeito do carregamento externo devem ser pequenos, se comparados com a menor dimensão do corpo.

2.2. Tensão e deformação

2.2.1. Tensões – Estado de Tensões

No estudo da mecânica dos materiais é de significado particular determinar-se a intensidade das forças internas atuando nas áreas infinitesimais de um corte, pois a resistência à deformação depende dela. A intensidade pode variar pontualmente, sendo, em geral, inclinadas com respeito ao plano de corte. A intensidade das forças distribuídas na seção, ou a força por unidade de área é conhecida como *tensão*, e dada matematicamente como:

$$\mathbf{s} = \frac{P}{A} \quad , \quad (2.1)$$

onde \mathbf{s} representa a tensão, P representa o módulo da força axial aplicada sobre a seção, e, A representa a área da seção. Tensões positivas indicam tensões de tração, ou seja, peças tracionadas, ao passo que tensões negativas indicam tensões de compressão, isto é, peças comprimidas. As unidades de \mathbf{s} , P e A , no SI, são:

P - N (Newton)
 A - m^2
 s - N/m^2 ou Pa (Pascal).

Como pode-se trabalhar com tensões muito altas, é comum se usar de potências de 10:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kPa} &= 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2 \\ 1 \text{ MPa} &= 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 \\ 1 \text{ GPa} &= 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

O Anexo A traz uma relação de prefixos para as potências de 10.

Em engenharia, é costume decompor esta intensidade da força em componente perpendicular e paralela a seção investigada. A intensidade da força perpendicular ou normal a seção é chamada de *tensão normal*, expressa por:

$$s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.2)$$

onde F é a força atuante normal ao corte.

Considerando uma força aplicada na direção do eixo da peça (quando a seção é aplicada perpendicular a este plano), temos o caso da força (ou carga) axial. Neste caso, a tensão normal representa a tensão máxima. Este é o caso geral a ser considerado. A equação (2.2) se reduz a equação (2.1) para representar a tensão normal (média) pois as tensões multiplicadas por suas respectivas áreas sobre as quais elas atuam geram forças, e, é o somatório destas forças, neste corte imaginário, que mantém o corpo em equilíbrio [Popov, 1976], conforme ilustrado na Figura 2.3(a). Outra simplificação é a de que uma distribuição uniforme de tensões só é possível se a linha de ação das forças aplicadas passar pelo centróide da seção considerada, como mostra a Figura 2.3(b).

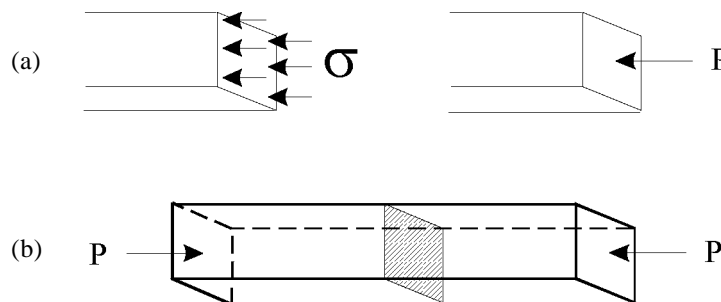


Figura 2.3 – Distribuição uniforme de tensão.

A outra componente da intensidade da força atua paralela ao plano da área elementar, sendo chamada de *tensão de cisalhamento* (ou tangencial), sendo representada pela letra grega t e expressa pela relação:

$$t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}, \quad (2.3)$$

onde V é a componente da força paralela ao corte. A Figura 2.4 mostra a ação da tensão normal e de cisalhamento sobre a seção de uma peça qualquer.

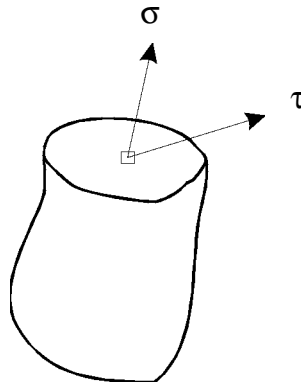


Figura 2.4 – Tensão normal e de cisalhamento.

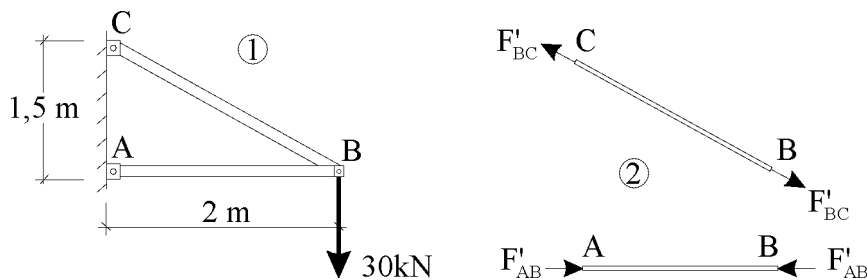
A exemplo da tensão normal média, pode-se definir uma tensão de cisalhamento média, na qual as tensões agem uniformemente distribuídas no plano do corte. Deste modo, temos que:

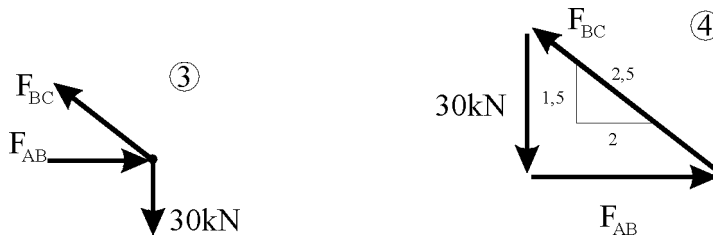
$$t = \frac{P}{A}, \quad (2.4)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, P é a força cortante total agindo paralela ao plano de corte, também chamada simplesmente de cisalhamento, e A a área da seção.

Exercício 2.1:

A situação apresentada pela Figura (1) abaixo é dada. As barras AB e CB estão sob a ação de forças, iguais e de sentido contrário, aplicadas nas suas extremidades.





Calcular o valor dessas forças.

$$\frac{F_{AB}}{2.0m} = \frac{F_{BC}}{2.5m} = \frac{30kN}{1.5m}$$

$$F_{AB} = 40 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = 50 \text{ kN} = 50 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Calcular o valor da tensão s atuante nas barras, sabendo que elas são constituídas de aço com diâmetro $d = 20\text{mm}$.

$$A_{BC} = pr^2 = p \left(\frac{20}{2} \cdot 10^{-3} \right)^2 = p (10 \cdot 10^{-3} m)^2 = 314 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$A_{AB} = 314 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$s_{BC} = \frac{50 \cdot 10^3 N}{314 \cdot 10^{-6}} = 159 \cdot 10^6 N/m^2 = 159 MPa$$

$$s_{AB} = \frac{40 \cdot 10^3 N}{314 \cdot 10^{-6}} = 127 \cdot 10^6 N/m^2 = 127 MPa$$

No caso de se desejar substituir as barras de aço por barras de alumínio, para suportar a carga aplicada, qual deve ser o diâmetro mínimo da barra? Dado: tensão admissível do alumínio: $\sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$.

$$s_{adm} = \frac{P_{BC}}{A_{BC}}$$

$$A = \frac{P}{s_{adm}} = \frac{50 \cdot 10^3 N}{100 \cdot 10^6 N/m^2} = 500 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$A = p \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{p}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-6}}{p}} = 12,6 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25 \text{ mm.}$$

Para o equilíbrio de um corpo no espaço, as equações da estática requerem que as condições abaixo sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & & \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & & \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & & \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Significado:

1ª coluna: a soma de todas as forças agindo no corpo em qualquer direção x, y, z deve ser igual a zero;

2ª coluna: a soma dos momentos de todas as forças em torno de qualquer eixo paralelo a qualquer direção x, y, z deve também ser zero para equilíbrio.

As equações (2.5) são diretamente aplicáveis a corpos sólidos deformáveis. As deformações em engenharia são geralmente negligenciáveis em comparação com as dimensões totais das estruturas.

2.2.2. Deslocamentos e Deformações

Define-se *deformação específica* (e) como sendo a relação:

$$e = \frac{d}{L} \quad (2.6)$$

onde d representa o valor da deformação sofrida por um corpo sob a ação de uma força P , ao passo que L indica o comprimento da peça. A deformação específica e não possui unidade, ou seja, é adimensional (às vezes, diz-se “m/m”).

Exercício 2.2:

Qual a deformação específica de uma barra de comprimento $L = 0,7$ m e seção transversal uniforme que se deforma com um valor $d = 140 \cdot 10^{-6}$ m ?

$$e = \frac{d}{L} = \frac{140 \cdot 10^{-6} m}{0,7 m} = 200 \cdot 10^{-6}$$

Outro modo para expressar ε :

$$e = \frac{140 \mu m}{0,7 m} = 200 \mu$$

2.2.3. Propriedades Mecânicas dos Materiais

Com respeito às suas propriedades mecânicas, diz-se que um material é dúctil, frágil, elástico ou plástico.

- (a) Ductibilidade (oposto é material frágil): chama-se de *dúctil* os materiais capazes de se deformarem bastante antes da ruptura. Por exemplo, pode-se citar o aço estrutural, metais, madeira, alumínio.
- (b) Fragilidade (oposto é material dúctil): um material *frágil* possui a propriedade de praticamente não se deformar antes da ruptura.
- (c) Elasticidade (oposto de plasticidade): diz-se que um material é *elástico* quando as deformações causadas por uma carga sobre ele aplicada desaparecem com sua retirada. Como exemplo, pode-se mencionar o aço, a madeira, o alumínio. Chama-se de *limite de elasticidade* ao maior valor da tensão σ para o qual o material apresenta comportamento elástico.
- (d) Plasticidade (oposto de elasticidade): diz-se que um material é *plástico* quando não retorna à forma sua inicial depois que a carga é retirada.

2.2.4. Diagrama Tensão-Deformação

Torna-se aparente da discussão em questão de que, para propósitos gerais, as deformações são melhor representadas por e (deformação específica). De modo semelhante, a tensão é um parâmetro mais significativo do que força, no estudo dos materiais, posto que o efeito de uma força aplicada sobre um material depende da área da seção. Assim sendo, no estudo das propriedades de materiais é de uso geral o emprego do *diagrama tensão-deformação*, que traduz a relação entre estes parâmetros. Neste diagrama, as coordenadas são: abscissa, e ; e ordenada, σ , conforme mostra a Figura 2.5.



Figura 2.5 – Diagrama tensão-deformação.

Este diagrama varia de material para material. Por exemplo, para o aço temperado (material dúctil) o diagrama se parece como ilustra a Figura 2.6 [Beer & Johnston, 1989].

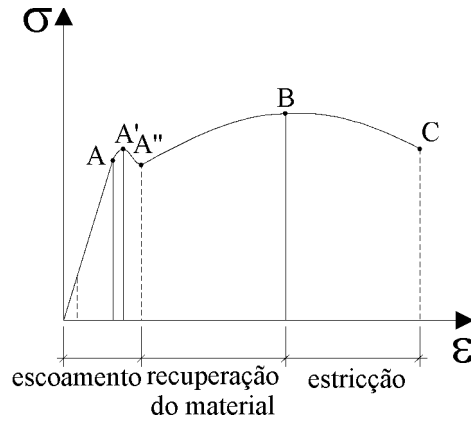


Figura 2.6 - Diagrama para material dúctil.

As situações apresentadas no diagrama são descritas a seguir:

Escoamento – quando o comprimento aumenta proporcionalmente a carga aplicada (corresponde a fase elástica do material). Até o ponto A, e é diretamente proporcional a s ; o ponto A' representa o *limite de elasticidade*, até onde o material se apresenta como elástico; o ponto A'' representa o *limite de escoamento*, a partir do qual o material se deforma sem que haja grande aumento das tensões nele aplicadas; a calha após A'' é o *patamar de escoamento* (onde se define a tensão de escoamento s_e ou s_y).

Estricção – quando a carga atinge valor que provoca a perda de resistência do material até sua ruptura. O ponto B representa o ponto de tensão máxima onde se define a *tensão última* (s_u); o ponto C é o ponto terminal da curva do diagrama, e representa o ponto de ruptura do material, no qual se define a *tensão de ruptura*. Existem casos nos quais a ruptura se dá a uma tensão abaixo da tensão de ruptura provocada pela carga, fenômeno este conhecido por *fadiga*.

A Figura 2.7 mostra um diagrama tensão-deformação típico para um material frágil.

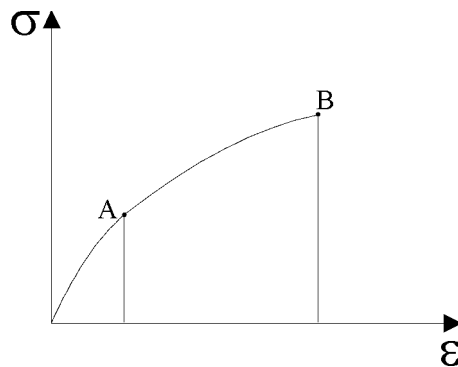


Figura 2.7 - Diagrama tensão-deformação para material frágil.

2.2.5. Lei de Hooke

Para propósitos de natureza prática, a relação entre tensão e deformação pode ser dita como linear para todos os materiais (veja ponto A nos diagramas tensão-deformação: as estruturas são projetadas de modo a que não se ultrapasse este ponto do diagrama). Deste modo, as tensões são diretamente proporcionais às deformações, no que se conhece por *Lei de Hooke*:

$$\mathbf{s} = E\mathbf{e} \quad (2.7)$$

onde E é a constante de proporcionalidade conhecida como *módulo de elasticidade do material* ou *módulo de Young*. A unidade de E é o Pascal. Por exemplo, para o aço E varia entre 200 e 207.10⁹ N/m².

Graficamente, E representa a inclinação de uma linha reta da origem do diagrama tensão-deformação até o ponto A, conforme mostra a Figura 2.8, ou seja, é igual a tangente do ângulo ϕ . Fisicamente, o módulo de elasticidade E representa a rigidez do material a uma carga sobre ele imposta. O valor de E corresponde a uma propriedade de um dado material, sendo, numericamente, uma quantidade muito grande, devido ao fato da deformação ϵ ser um valor numérico muito pequeno.

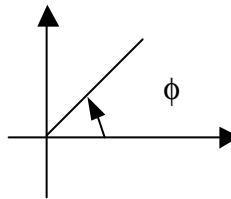


Figura 2.8 – Representação gráfica do módulo de elasticidade.

A Lei de Hooke se aplica somente dentro do limite de proporcionalidade dos materiais. Define-se o limite de proporcionalidade como sendo o maior valor da tensão \mathbf{s} para o qual a Lei de Hooke é válida (no ponto A).

2.2.6. Deformação de barra sob o efeito de cargas axiais

As equações (2.1), (2.6) e (2.7), juntamente com o módulo de elasticidade, são suficientes para a determinação das deformações de barras sob o efeito de cargas axiais (satisfazendo a lei de Hooke, ou seja, dentro do limite de proporcionalidade do material).

Para a derivação das equações necessárias, considera-se uma barra cujas seções possuem áreas variáveis e sobre a qual forças de diferentes magnitudes são aplicadas em vários pontos (Figura 2.9). Deseja-se saber qual a variação no comprimento entre os dois pontos, A e B, da barra provocado por estas forças. Esta deformação corresponde a soma das deformações infinitesimais que ocorrem na barra.

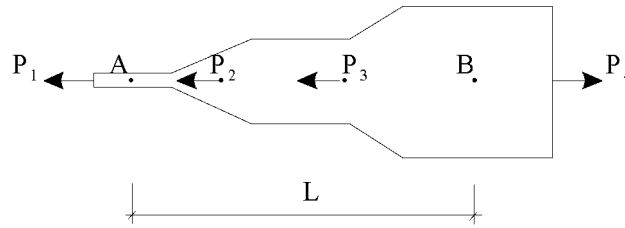


Figura 2.9 – Barra de dimensões variáveis sujeita a força de diferentes magnitudes.

Em um elemento arbitrário (de comprimento dx) na barra existe uma deformação infinitesimal dd , provocada pela aplicação das forças, que é igual a deformação específica e multiplicada pelo comprimento dx :

$$dd = e \cdot dx \quad (2.8)$$

Sabe-se, da lei de Hooke, que a deformação específica é igual a tensão s_x dividida pelo módulo de elasticidade:

$$e = \frac{s_x}{E} \quad (2.9)$$

Contudo, em geral, s_x é uma quantidade variável obtida dividindo-se a força variável P_x pela área correspondente A_x :

$$s_x = \frac{P_x}{A_x} \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) e (2.9) em (2.8), tem-se que:

$$dd = \frac{s_x}{E} dx = \frac{P_x \cdot dx}{A_x \cdot E} \quad (2.11)$$

Considerando que a contribuição de cada elemento individual seja conhecida, pode-se obter a deformação total entre dois pontos A e B:

$$d = \int_A^B dd = \int_A^B \frac{P_x \cdot dx}{A_x \cdot E} \quad (2.12)$$

Ou, discretizando-se os i -ésimos elementos:

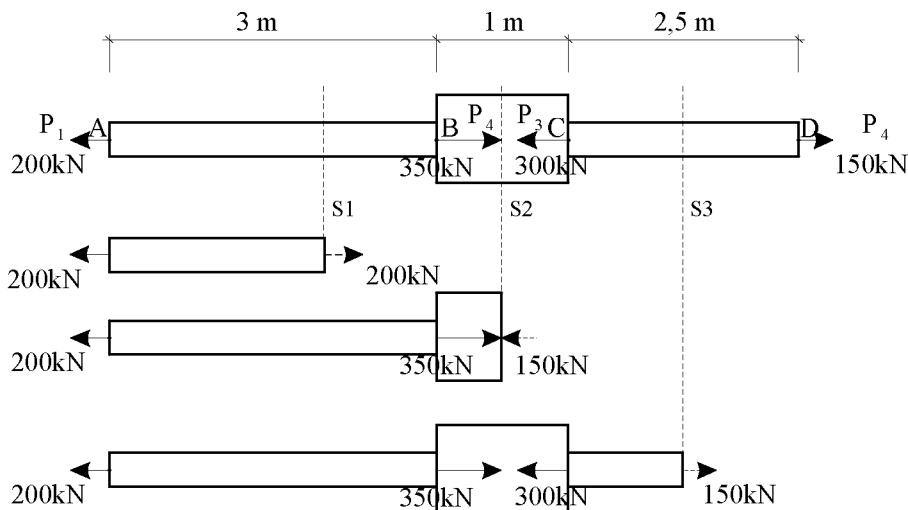
$$\mathbf{d} = \sum_i \frac{P_i \cdot dx_i}{A_i \cdot E_i} \quad (2.13)$$

Para uma barra homogênea, com seção transversal uniforme de área constante, sob a ação de carga nas extremidades, a equação (2.13) se reduz a:

$$\mathbf{d} = \frac{PL}{AE} \quad (2.14)$$

Exercício 2.3:

Calcular a deformação \mathbf{d} (neste caso diz-se “deslocamento relativo” pois a barra está “livre”) entre os pontos A e D de uma barra de aço, de área seccional variável, quando sujeita às forças P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , conforme figura. Adotar $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ($=200\text{GPa} = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$). Dados: $A_{AB} = 0,002\text{m}^2$; $A_{BC} = 0,004\text{m}^2$; $A_{CD} = 0,002\text{m}^2$.



Solução:

1º Passo: Verificar se o corpo está em equilíbrio (se $\Sigma F = 0$):

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 200 - 350 + 300 - 150 = 0 \text{ (sim)}$$

2º Passo: Independente de onde a seção S1 corta a barra entre A e B, $P_x = 200 \text{ kN}$; o mesmo para S2, entre A e C, $P_x = -150\text{kN}$; e para S3, $P_x = 150\text{kN}$.

3º Passo: Como tanto P_x como A_x possuem variações bruscas entre A e D, a integral dada pela equação (2.12) deve ser dividida:

$$\mathbf{d} = \int_A^D \frac{P_x \cdot dx}{A_x \cdot E} = \int_A^B \frac{P_{AB} \cdot dx}{A_{AB} \cdot E} + \int_B^C \frac{P_{BC} \cdot dx}{A_{BC} \cdot E} + \int_C^D \frac{P_{CD} \cdot dx}{A_{CD} \cdot E}$$

Sendo que P_x e A_x são constantes dentro dos limites indicados. Logo,

$$d = \sum_i \frac{P_i \cdot dx_i}{A_i \cdot E_i}$$

Substituindo :

$$d = \frac{200 \cdot 3}{0,002 \cdot 200 \times 10^6} - \frac{150 \cdot 1}{0,004 \cdot 200 \times 10^6} + \frac{150 \cdot 2,5}{0,002 \cdot 200 \times 10^6}$$

(o leitor é encorajado a analisar a coerência entre as unidades)

$$d = 0,0015 - 0,000188 + 0,000938 = 0,00225 \text{ m} \approx 2,25 \text{ mm}$$

Sinal positivo significa que a barra tem seu comprimento aumentado (alongamento)

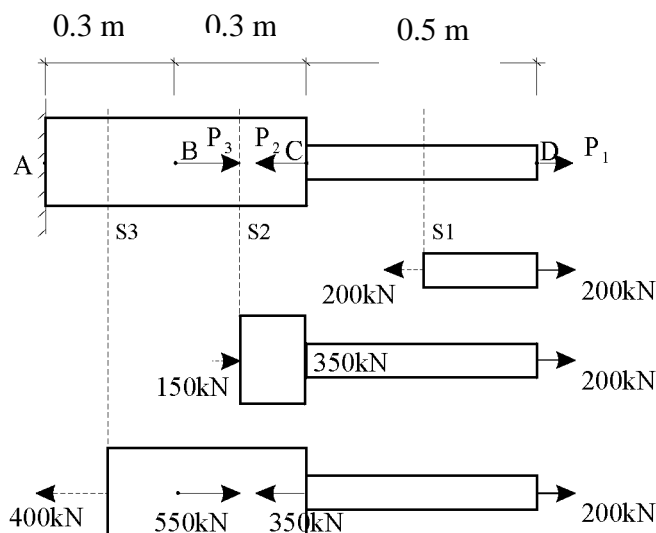
Exercício 2.4:

Calcular a deformação d entre os pontos A e D de uma barra de aço, de área seccional variável, quando sujeitos às forças P_1 , P_2 e P_3 conforme a figura abaixo. Adotar $E = 200\text{GPa}$ ($= 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$).

Dados: $P_1 = 200 \text{ kN}$; $P_2 = 350 \text{ kN}$; $P_3 = 550 \text{ kN}$.

Área: $A_{ac} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$A_{cd} = 200 \times 10^{-6} \text{ m}^2$



$$P_{xs1} = 200\text{kN}$$

$$P_{xs2} = 200\text{kN} - 350\text{kN} = -150\text{kN}$$

$$P_{xs3} = 200\text{kN} - 350\text{kN} + 550\text{kN} = 400\text{kN}$$

$$d = 0,0025 \text{ m} + 0,00045 \text{ m} + 0,0012 \text{ m} = 3,2 \text{ mm}$$

Sinal positivo significa alongamento.

2.2.7. Coeficiente de Poisson

O coeficiente de Poisson ν traduz o fenômeno segundo o qual um corpo sólido se contrai lateralmente a uma tensão axial, e que o mesmo se expande lateralmente quando sujeito a uma compressão axial, conforme ilustrado na Figura 2.10.

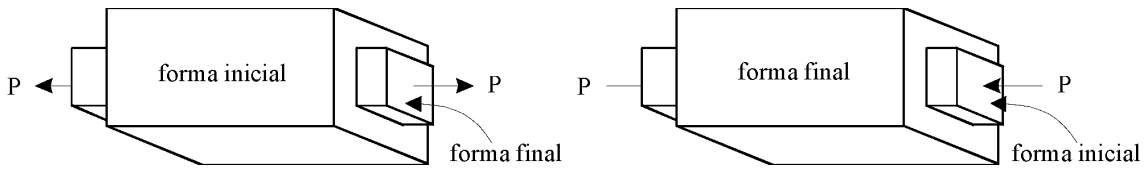


Figura 2.10 – Comportamento de um corpo traduzido pelo coeficiente de Poisson.

O coeficiente de Poisson é dado por:

$$\nu = \frac{e_t}{e} = -\frac{e_t}{e} \quad (2.15)$$

onde e_t representa a deformação lateral ou transversal e e a deformação axial. O sinal oposto de e_t e e na equação é devido ao fato de que os efeitos são opostos, isto é, um incremento em uma dimensão corresponde a uma redução na outra. Um sinal positivo de e_t indica um incremento na dimensão lateral. O coeficiente ν varia entre 0,1 (alguns concretos) a 0,5 (borracha), com valores típicos entre 0,25 a 0,35. Por exemplo pode-se mencionar o aço ($\nu = 0,3$) e o concreto, em geral, ($\nu = 0,15$ a $0,20$). No contexto destas notas, ν é usado somente quando os materiais se comportam elasticamente.

Exercício 2.5:

Calcular o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson de uma barra de alumínio de 60 mm de diâmetro sob a ação de uma força axial de 100 kN. A deformação axial resultante é de 0,205 mm, ao passo que o diâmetro reduziu-se em 0,01515 mm.

Solução: Deformação específica principal:

$$e_t = \frac{dt}{d} = \frac{-0,00001515m}{0,06m} = -0,0002525 \text{ m/m}$$

O sinal é negativo pois houve redução do diâmetro.

Deformação específica axial:

$$e = \frac{d}{L} = \frac{0,000205m}{0,3m} = 0,000683 \text{ m/m}$$

Coefficiente de Poisson

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{e}_t}{\mathbf{e}} = 0,37$$

O módulo de elasticidade:

$$\text{área : } A = \mathbf{p}r^2 = \mathbf{p}(0,03)^2 = 0,0028m^2$$

$$\mathbf{d} = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\mathbf{d}} = \frac{100kN \cdot 0,3m}{0,0028m^2 \cdot 0,000205m} = 52 \times 10^6 kN/m^2$$

2.2.8. Lei de Hooke generalizada

As equações que descrevem totalmente as condições de deformações específicas provocadas pela aplicação de carga axial (ao longo do eixo x) seguem da equação (2.15) e da Lei de Hooke, como:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{S}_x}{E} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_x}{E} \quad (2.17)$$

Na equação (2.17) \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z são iguais devido a consideração inicial de homogeneidade e isotropismo. Cabe ressaltar que \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z correspondem a \mathbf{e}_t e que \mathbf{e}_x corresponde a \mathbf{e} , da equação (2.15)

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{e}_y}{\mathbf{e}_x} = -\frac{\mathbf{e}_z}{\mathbf{e}_x} \quad (2.18)$$

A generalização da Lei de Hooke se baseia no *princípio da superposição*, que supõe que a tensão ou deformação resultante em um sistema devido a aplicação de várias forças é a soma algébrica dos seus efeitos quando aplicados separadamente. Este princípio é válido dentro do limite de proporcionalidade do material, e se existir uma relação direta e linear entre cada força aplicada (causa) e efeito provocado (conseqüência).

Uma tensão na direção x provoca uma deformação específica positiva, no eixo x, igual a \mathbf{S}_x/E , e deformações específicas negativas, nos eixos y e z, iguais a $-\mathbf{n}\mathbf{S}_x/E$. Do mesmo modo, uma tensão positiva na direção y provoca uma deformação específica positiva igual a \mathbf{S}_y/E , e deformações específicas negativas, nos eixos x e z, iguais a $-\mathbf{n}\mathbf{S}_y/E$. O mesmo raciocínio se aplica a tensão na direção y, z. Deste modo, as deformações específicas nas três direções dos eixos coordenados são:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= +\frac{\mathbf{S}_x}{E} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_y}{E} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_z}{E} \\ \mathbf{e}_y &= -\mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_x}{E} + \frac{\mathbf{S}_y}{E} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_z}{E} \\ \mathbf{e}_z &= -\mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_x}{E} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{S}_y}{E} + \frac{\mathbf{S}_z}{E} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é a generalização da lei de Hooke. Ela fornece a deformação específica do corpo. Para se obter a deformação total (alongação) do corpo, em uma dada direção, deve-se multiplicá-la pela dimensão do elemento naquela direção. Por exemplo, a alongação da direção x é dada por:

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{e}_x \cdot L_x \quad (2.20)$$

Exercício 2.6:

Um cubo de aço de 40 mm sofre uma pressão uniforme de 200.000 kN/m² sobre todas as suas faces. Determine a variação da dimensão entre duas de suas faces paralelas. São dados $E = 200 \times 10^6$ kN/m² e $\mathbf{n} = 0,25$.

Solução: Obtida a partir da equação (2.19). Reparar que pressão equívale a tensão de compressão.

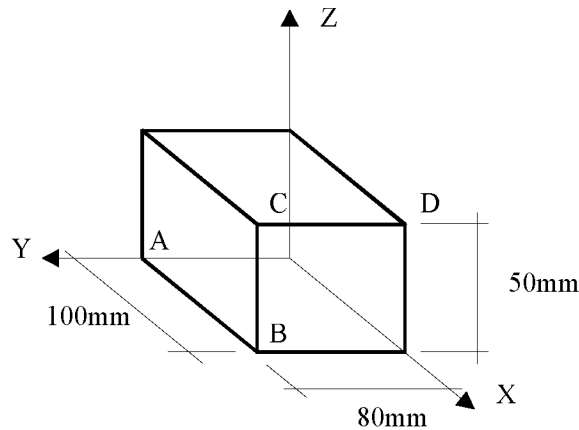
$$\mathbf{e}_x = \frac{-200.000}{200 \times 10^6} - 0,25 \frac{(-200.000)}{200 \times 10^6} - 0,25 \frac{(-200.000)}{200 \times 10^6} = -5 \times 10^{-4} \text{ m/m}$$

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{e}_x \cdot L = -5 \times 10^{-4} \times 0,04 = -0,000020 \text{ m}$$

Neste caso, $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_y = \mathbf{d}_z$ (pois a pressão é uniforme)

Exercício 2.7:

Um bloco de aço, cujas dimensões são apresentadas na figura abaixo, está sujeito a pressão uniforme em todas as faces.



O comprimento AB sofre uma compressão de $-0,000030m$. Calcular a variação do comprimento das outras duas arestas e a pressão aplicada às faces do bloco.

Dados: $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,25$.

- Considerando que a pressão é uniforme e que corresponde a uma tensão de compressão:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

substituindo na equação (2.19)

$$e_x = -\frac{p}{E} + \nu \frac{p}{E} + \nu \frac{p}{E} = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu)$$

sendo que o mesmo se verifica para $e_y = e_z$.

Logo:

$$e_x = e_y = e_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \quad (2.21)$$

$$e_x = \frac{d_x}{L_{AB}} = \frac{-0.000030m}{0.1m} = -0.0003$$

Logo:

$$e_y = \frac{d_y}{L_{BD}} \Rightarrow d_y = e_y \cdot L_{BD} = -0.0003 \times 0.08 = -0.000024m = 0,024mm$$

$$e_z = \frac{d_z}{L_{BC}} \Rightarrow d_z = e_z \cdot L_{BC} = -0.0003 \times 0.05 = 0.000015m = 0.015mm$$

como $\mathbf{e}_x = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu)$

$$P = -\frac{0.0003 \cdot 200 \times 10^6}{(1 - 2 \times 0,25)} = -120 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = -120 \text{ MPa}$$

2.2.9. Dilatação térmica

Trata do efeito causado pelas tensões normais σ_x , σ_y , σ_z , no volume elementar de um material. Considerando o volume inicial de um paralelepípedo como:

$$V_o = dx \, dy \, dz \quad (2.22)$$

Sob a ação das tensões \mathbf{s}_x , \mathbf{s}_y , \mathbf{s}_z , são provocadas as deformações respectivas \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y , \mathbf{d}_z . O volume passa a ser então expresso por:

$$V_I = dx_I \, dy_I \, dz_I \quad (2.23)$$

Como: $dx_I = dx + \mathbf{d}_x$

$$dy_I = dy + \mathbf{d}_y \quad (2.24)$$

$$dz_I = dz + \mathbf{d}_z,$$

e como:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_x &= \mathbf{e}_x \, dx \\ \mathbf{d}_y &= \mathbf{e}_y \, dy \\ \mathbf{d}_z &= \mathbf{e}_z \, dz, \end{aligned} \quad (2.25)$$

o volume V_I pode ser re-escrito como:

$$\begin{aligned} V_I &= (dx + \mathbf{e}_x \, dx) (dy + \mathbf{e}_y \, dy) (dz + \mathbf{e}_z \, dz) = \\ &= [dx (1 + \mathbf{e}_x)] [dy (1 + \mathbf{e}_y)] [dz (1 + \mathbf{e}_z)]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considerando o volume V_o como sendo unitário, ou seja, $dx=dy=dz=1$, a equação (2.26) se reduz a:

$$V_I = (1 + \mathbf{e}_x) (1 + \mathbf{e}_y) (1 + \mathbf{e}_z). \quad (2.27)$$

Como o interesse se prende na variação volumétrica, por unidade de volume (e), faz-se:

$$e = DV/V_o = (V_I - V_o) / V_o = \{ [(1 + \mathbf{e}_x) (1 + \mathbf{e}_y) (1 + \mathbf{e}_z)] - 1 \} / 1. \quad (2.28)$$

Considerando que as deformações específicas são muito menores do que a unidade, a equação (2.28) reduz-se a:

$$e = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) fornece a *dilatação volumétrica* (ou cúbica) *específica* do material. Substituindo (2.19) em (2.29), e desenvolvendo, tem-se que:

$$e = [(1 - 2 \mathbf{n}) (\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y + \mathbf{s}_z)] / E. \quad (2.30)$$

No caso de um corpo submetido a uma *pressão hidrostática uniforme* (p), pode-se substituir a deformação específica \mathbf{d} por p , reduzindo-se a equação (2.30) a:

$$e = - [3 p (1 - 2 \mathbf{n})] / E. \quad (2.31)$$

Definindo a constante k , chamada de *módulo de elasticidade volumétrica* (ou cúbica), como:

$$k = E / 3(1 - 2\mathbf{n}), \quad (2.32)$$

a dilatação volumétrica específica se reduz a:

$$e = -p / k. \quad (2.33)$$

Exercício 2.8

Calcular a variação volumétrica DV de um bloco de aço, de lados 150 mm, 75 mm e 100 mm, sob a ação de uma pressão hidrostática $p = 200 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$, adotando-se $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ e $\mathbf{n} = 0,29$.

da equação (2.32): $k = 158 \text{ GPa}$

da equação (2.33): $e = -1,265 \times 10^{-3}$

$V_0 = 150 \times 75 \times 100 = 1,125 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Da equação (2.28): $DV = -1,423 \text{ mm}^3$

2.2.10. Tensões devido a variação de temperatura

Considere-se situações onde existam variações de temperatura. Seja a barra da Figura 2.10, homogênea e de seção transversal uniforme, sob a ação de uma temperatura T . Se a temperatura da barra for aumentada de um valor DT , ela alonga de um valor d_T , dado pela relação:

$$d_T = \mathbf{a} DT L, \quad (2.34)$$

onde \mathbf{a} é o coeficiente de *expansão* (ou dilatação) *térmica* do material que compõe a barra, e L seu comprimento original.

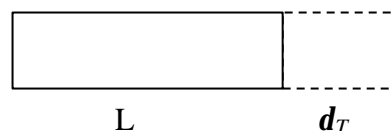


Figura 2.10 – Alongação de uma barra sob o efeito de um acréscimo de temperatura.

Considerando que a barra esteja situada entre 2 anteparos fixos (Figura 2.11), um acréscimo de temperatura não provocará alongamento (deformação), ou seja:

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{d}_T / L, \quad (2.35)$$

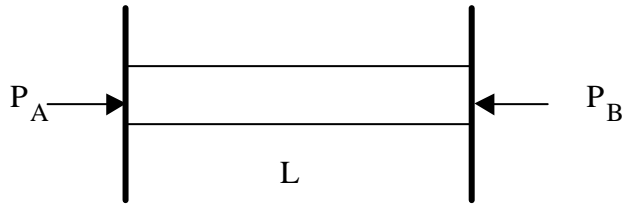


Figura 2.11 – Barra entre dois anteparos fixos.

onde \mathbf{e}_T representa a *deformação térmica específica*. Neste caso, os anteparos aplicam as forças P_A e P_B após o acréscimo de temperatura DT . Como consequência, existe um estado de tensão, porém sem existirem deformações. Para se calcular o estado de tensão \mathbf{s} existente, procede-se em duas etapas. Na primeira, calcula-se a intensidade de P desconsiderando o anteparo. Neste caso, a elongação é dada pela equação (2.34). Numa segunda etapa, aplica-se a força P , que é dada pela equação (2.14), onde \mathbf{d}_P substitui \mathbf{d} . Como a deformação total é nula:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_T + \mathbf{d}_P \quad (2.36)$$

Entrando com as equações (2.14) e (2.34) na equação (2.36) e desenvolvendo, tem-se que:

$$P = -A E \mathbf{a} DT, \quad (2.37)$$

e que:

$$\sigma = -E \mathbf{a} DT. \quad (2.38)$$

No caso de uma barra com áreas variadas, conforma exemplifica a Figura 2.12, poderão haver deformações nas suas componentes com sinais contrários, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{AB} &= -\mathbf{e}_{BC} \\ \mathbf{d}_{AB} &= -\mathbf{d}_{BC} \end{aligned} \quad (2.39)$$

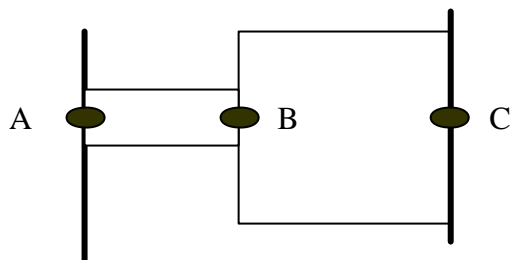


Figura 2.12 – Barra de área variada.

Exercício 2.9

Considere a barra AB compreendida por dois anteparos, fixos às suas extremidades, para uma temperatura de $+20^{\circ}\text{C}$. Calcular a tensão atuante para uma temperatura de -40°C .

Dados: $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$

$$\alpha = 10 \times 10^{-6} /^{\circ}\text{C}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$A = 0,4 \text{ m}^2$$

Solução

(a) variação de temperatura:

$$\Delta T = -40^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C} = -60^{\circ}\text{C}$$

(b) deformação desconsiderando o anteparo – equação (2.34):

$$d_T = 10 \times 10^{-6} /^{\circ}\text{C} \times (-60^{\circ}\text{C}) \times 1 \text{ m} = -0,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(c) deformação aplicando a reação P_A na extremidade A - equação (2.14):

$$d_{P_A} = 1 \text{ m} \times P_A \times (80 \times 10^{-6} \text{ kN})$$

(d) reação P_A

$$d = d_T + d_{P_A} = -0,6 \times 10^{-3} + P_A \times 80 \times 10^{-6}$$

$$P_A = 48 \times 10^3 \text{ kN}$$

Ou, alternativamente: $P_A = -A E \alpha \Delta T = 48 \times 10^3 \text{ kN}$

(e) estado de tensão:

$$\sigma = P/A = 48 \times 10^3 \text{ kN} / 0,4 \text{ m} = 120 \text{ kN/m}^2$$

Exercício 2.10

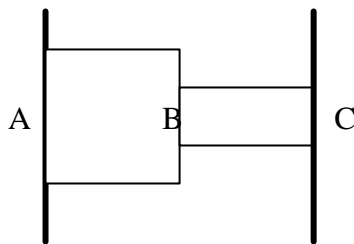
Considere, agora, a peça da figura abaixo. Calcular as tensões atuantes nas partes AB e BC, e respectivas deformações.

Dados: $L_{AB} = 0,5 \text{ m}$

$$L_{BC} = 0,5 \text{ m}$$

$$A_{AB} = 0,1 \text{ m}^2$$

$$A_{BC} = 0,05 \text{ m}^2$$



solução

(a) mesmo do exercício anterior

(b) mesmo do exercício anterior

(c) deformação aplicando a reação P_A na extremidade A:

(d) reação P_A

$$d = d_T + d_{P_A} = -0,6 \times 10^{-3} + P_A \times 0,075 \times 10^{-6}$$

$$P_A = 8 \times 10^3 \text{ kN}$$

(e) tensões atuantes em AB e BC:

$$\sigma_{AB} = P_{AB}/A_{AB} = (8 \times 10^3)/0,1 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{BC} = P_{BC}/A_{BC} = (8 \times 10^3)/0,05 \text{ m}^2$$

(f) deformação específica ϵ , AC e BC:

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_T + \sigma_{AB}/E$$

onde: ϵ_T – parcela produzida na barra sem o anteparo

σ_{AB}/E – parcela devida a força P considerando o anteparo

de forma análoga

$$\epsilon_{BC} = \epsilon_T + \sigma_{BC}/E$$

$$e_T = d_T / L = a \Delta T = -0,6 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{AB} = -0,0002$$

$$\epsilon_{BC} = +0,0002$$

(g) cálculo das deformações totais:

$$d_{AB} = \epsilon_{AB} L = -0,1 \times 10^{-3}$$

$$d_{BC} = \epsilon_{BC} L = +0,1 \times 10^{-3}$$

(verifica-se que $d = d_{AB} + d_{BC} = 0$)

2.2.11. Tensão admissível

Para o projeto de novas peças e estruturas, é importante que se conheça como o material que compõe o corpo irá atuar sob condições de carregamento conhecidas, o que geralmente pode ser feito em testes laboratoriais. Uma força necessária para provocar a ruptura de uma peça é chamada de *carregamento último* (P_u). A tensão associada é a *tensão última* (σ_u). Ambas se relacionam por:

$$s_u = P_u / A , \quad (2.40)$$

onde A é a área da seção transversal da peça. Para o projeto de novas peças, a tensão admissível \underline{s} é definida em patamares bastante inferiores que s_u . Define-se *fator* (ou coeficiente) *de segurança* (FS) como a razão entre o carregamento último e o *carregamento admissível* (\underline{P}):

$$FS = P_u / \underline{P} , \quad (2.41)$$

ou, como existe relação linear entre P e s , o FS pode ser re-escrito como:

$$FS = s_u / \underline{s} . \quad (2.42)$$

Pode-se dizer que se deseja um FS que satisfaça a:

$$\underline{s} \geq P / A . \quad (2.43)$$

2.2.12. Deformação de cisalhamento em planos perpendiculares

Considere a Figura 2.13, que apresenta o caso mais geral de estado de tensão agindo sobre um cubo elementar. Esta figura mostra as tensões normais \mathbf{s}_x , \mathbf{s}_y e \mathbf{s}_z bem como as tensões de cisalhamento \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y e \mathbf{t}_z [Dave, 1984]. As tensões de cisalhamento tendem a deformar o cubo elementar em um paralelogramo oblíquo, segundo um ângulo \mathbf{g} , chamado de *deformação de cisalhamento*, conforme ilustrado na Figura 2.14. A partir desta figura pode-se verificar que a deformação de cisalhamento, também chamada de *cisalhamento simples*, corresponde ao ângulo subtendido pelo deslocamento propriamente dito. Numericamente, e considerando-se que as deformações angulares são muito pequenas, ela é igual a:

$$\mathbf{g} = \tan(\theta - \theta'). \quad (2.44)$$

A tensão de cisalhamento é definida pela equação (2.4). As tensões de cisalhamento em planos mutuamente perpendiculares de um elemento infinitesimal são numericamente iguais. Isto significa que, por exemplo, $\mathbf{t}_{xy} = \mathbf{t}_{yx}$.

Pode-se definir a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento como, por exemplo:

$$\mathbf{t}_{xy} = G \mathbf{g}_{xy}, \quad (2.45)$$

onde G é o *módulo de elasticidade transversal*. A equação (2.45) se aplica quando não se excede o limite de proporcionalidade. Do exposto, pode-se complementar a Lei de Hooke generalizada, dada pela equação (2.19) com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{xy} &= \mathbf{t}_{xy} / G \\ \mathbf{g}_{yz} &= \mathbf{t}_{yz} / G \\ \mathbf{g}_{zx} &= \mathbf{t}_{zx} / G \end{aligned} \quad (2.46)$$

Existe uma relação entre as três constantes elásticas E , \mathbf{n} e G , para materiais isotrópicos. Esta relação é:

$$G = E / [2(1 + \mathbf{n})]. \quad (2.47)$$

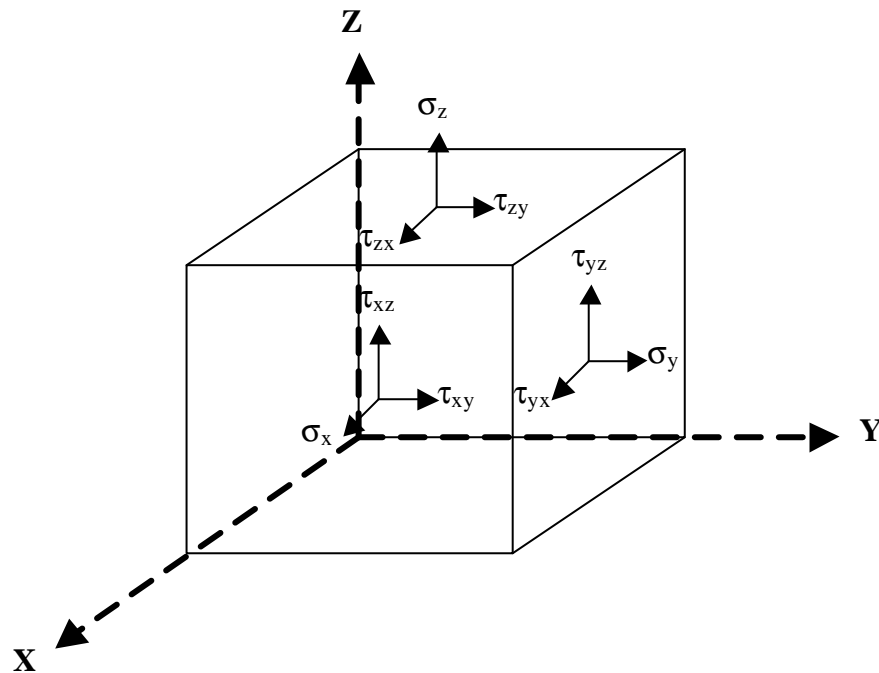


Figura 2.13 – Caso geral de estado de tensão.

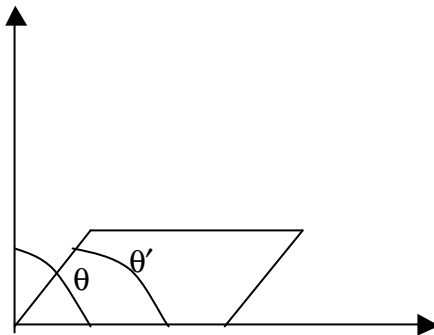
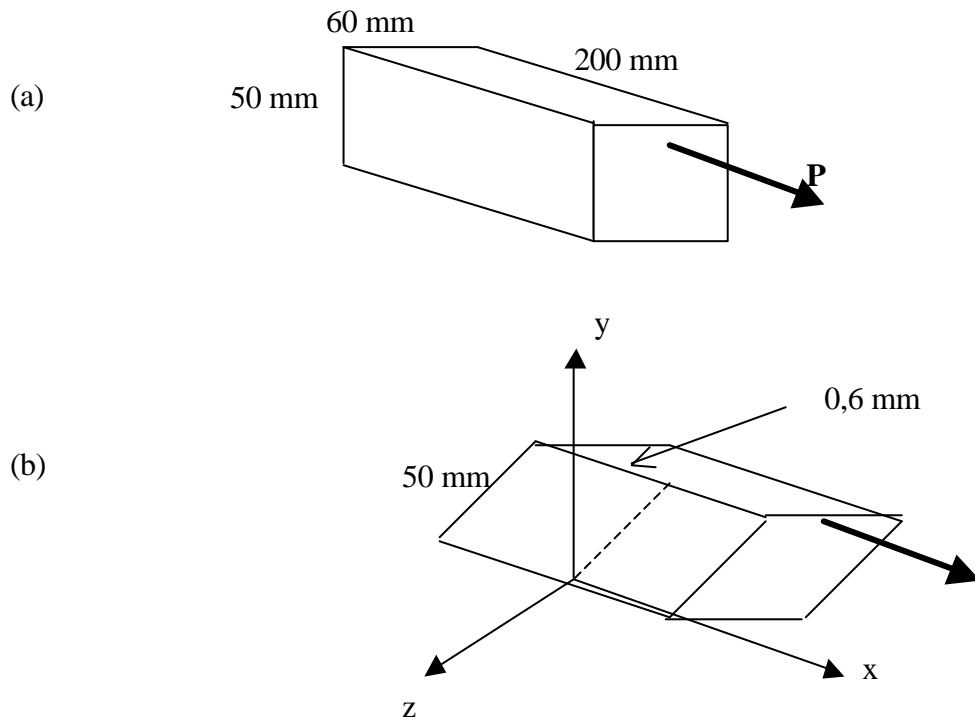


Figura 2.14 – Deformação de cisalhamento.

Exercício 2.11

Considere um corpo com a forma de um paralelepípedo, conforme figura (a), composta por um material cujo módulo de elasticidade transversal (G) é igual a $500 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$. Uma força é aplicada à parte superior do corpo, provocando um movimento de $0,6 \text{ mm}$, conforme figura (b). Calcular:

- a deformação de cisalhamento do material;
- a força aplicada



Solução:

(a) deformação de cisalhamento: $\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = 0,6 \text{ mm} / 50 \text{ mm} = 0,012$

(b) da definição de tensão de cisalhamento: $\tau_{xy} = P / A$

precisa-se de τ_{xy} e de A

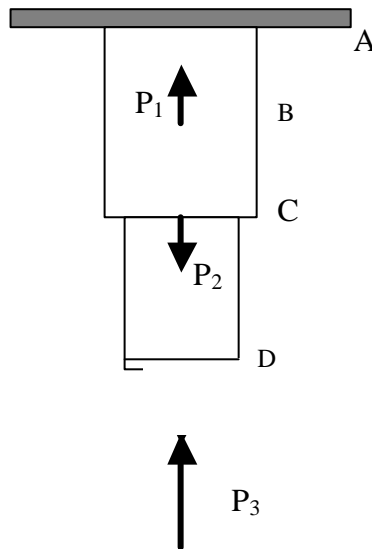
da Lei de Hooke: $t_{xy} = G g_{xy} = 500 \times 10^3 \times 0,012 = 6 \text{ MPa}$

área da placa: $A = 0,2 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} = 0,012 \text{ m}^2$

$P = 6 \times 10^3 \times 0,012 = 72 \text{ kN}$.

2.3 Exercícios propostos

2.3.1) Considere a haste ABCD da figura, feita de alumínio com módulo de elasticidade igual a 70 GPa. Sobre ela são aplicadas as cargas $P_1 = 50 \times 10^3$ N, $P_2 = 75 \times 10^3$ N e $P_3 = 100 \times 10^3$ N. Os comprimentos são $AB = 1,75$ m, $BC = 1,25$ m e $CD = 1,5$ m. Calcular, desprezando o próprio peso da haste, o deslocamento do ponto D. O diâmetro do segmento AC é igual a 63 cm e do segmento CD é de 50 cm.



2.3.2) Supõe-se a existência de uma barra de alumínio de diâmetro igual a 2 mm, compreendida por 2 anteparos, fixos às extremidades, a uma temperatura ambiente inicial de 20 °C. Houve uma variação de temperatura, ocasionando uma reação igual a 50×10^3 kN. Sabendo-se que o módulo de elasticidade é igual a 70 GPa, e que o fator de dilatação térmica é igual a 23×10^{-6} /°C, calcular a nova temperatura e o comprimento da barra nesta nova temperatura, desconsiderando-se o anteparo.

2.3.3) Uma esfera de aço está sujeita a uma pressão hidrostática de 900 kN, acarretando em um decréscimo de $-0,05$ m³ de seu volume original. Calcular o raio original desta esfera. Dados: módulo de elasticidade igual a 200×10^6 kN/m² e coeficiente de Poisson igual a 0,30.

2.3.4) Um fio de aço, de diâmetro igual a 6 mm, está sujeito a uma força de tração. Nele, foi medido um alongamento igual a 0,4 mm e um aumento de volume ΔV de 2,5 mm³. Calcular o coeficiente de Poisson. O módulo de elasticidade do aço é igual a 200×10^6 kN/m²

2.3.5) Responda de forma objetiva às seguintes perguntas.

- No que se constitui o Diagrama Tensão-Deformação?
- Como é possível se classificar um material usando seu Diagrama Tensão-Deformação?
- Qual a diferença entre tensão normal e tensão de cisalhamento?
- O que é um material dúctil? Exemplifique.
- Em que circunstâncias é válida a aplicação da Lei de Hooke?
- Qual o princípio que norteia a generalização da Lei de Hooke?
- Qual a relação que existe entre o Diagrama Tensão-Deformação e a tensão admissível?
- Como se traduz a deformação provocada por cisalhamento?

2.3.6) Após a aplicação, à uma barra de alumínio, de uma tração de 3500 N, ela deve se distender 4 mm. Determine o menor diâmetro d e o menor comprimento L , que devem ser adotados para a barra. São dados os valores da tensão admissível igual a 160 MPa e do módulo de elasticidade igual a 71 GPa.

2.3.7) Uma esfera de aço de 2,70 m de diâmetro está sujeita a uma pressão hidrostática de 900×10^3 kN. Calcular a diminuição do seu volume. Dados: $E = 200 \times 10^6$ kN/m² e $\nu = 0,27$.

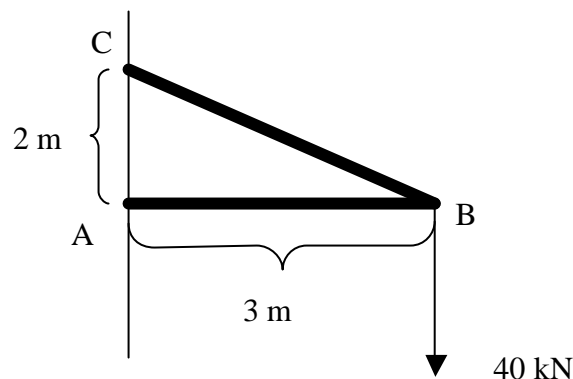
2.3.8) Um arame de alumínio, de 30 m de comprimento, é submetido a uma tensão de tração de 70 MPa.

- Determinar o alongamento do arame.
- De quantos graus seria necessário elevar a temperatura do arame para se obter o mesmo alongamento?

Dados: módulo de elasticidade igual a 70 GPa e coeficiente de dilatação térmica igual a $23 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.

2.3.9) Considere as barras AB e CD, sob a ação de forças, iguais e de sentido contrário, aplicadas nas suas extremidades. (a) Calcular o valor destas forças; (b) Calcular o valor da tensão atuante nas barras, sabendo que elas são constituídas de aço com diâmetro igual a 30 mm; (c) No caso de se desejar substituir as barras de aço por barras de alumínio, para suportar a carga aplicada, qual deve ser o diâmetro mínimo da barra?

Dados: tensão admissível do alumínio igual a 100 MPa.



2.3.10) Responda às perguntas abaixo de forma objetiva:

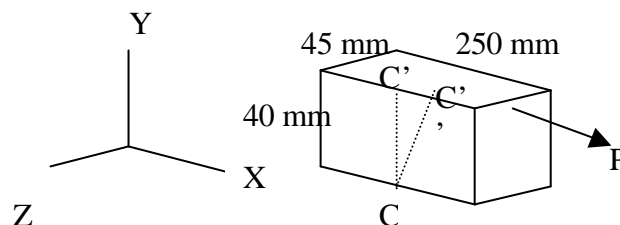
- Quais as hipóteses simplificadoras da Mecânica dos Materiais, relativas ao material?
- Qual deve ser o diâmetro mínimo de uma barra de aço de modo que ela suporte uma carga, igual a 60 kN, aplicada sobre ela? É dado a tensão admissível do aço: 90 MPa.
- Quais são as propriedades mecânicas dos materiais? Como algumas delas são representadas no diagrama tensão-deformação?
- Considere a equação abaixo. Qual o seu significado físico? O que representam seus elementos?

$$d = \int_A^B \frac{Px \cdot dx}{Ax \cdot E}$$

- Considere o coeficiente de Poisson ν dado pela equação abaixo. Qual o significado físico do sinal negativo do lado esquerdo da equação? O que significam os seus elementos?

$$u = -\nu \epsilon^{-1} e$$

- Considere um corpo em forma de paralelepípedo representado abaixo. Ao aplicar-se a força P indicada, ocorreu um movimento, paralelo ao eixo de aplicação da força, de 1 mm. Qual o valor da deformação de cisalhamento do material?



2.3.11) Provar a equação (2.30) a partir das equações (2.29) e (2.19).

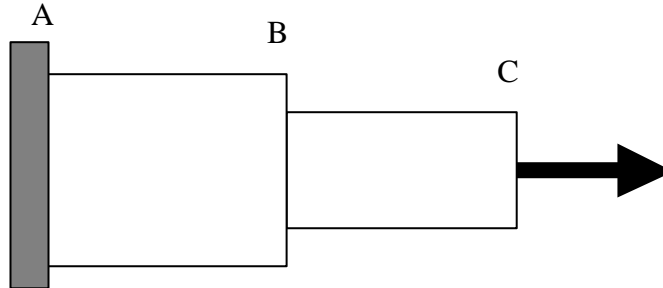
2.3.12) Espera-se que uma barra de alumínio distenda 2 mm ao se aplicar a ela uma tração de 2200 N. Determinar o menor diâmetro d e o menor comprimento L , que devem ser adotados para a barra. São dados os valores da tensão admissível igual a 150 MPa e do módulo de elasticidade igual a 70 GPa.

2.3.13) Considere uma barra de alumínio sob a qual é aplicada uma tração de 1000 N. Calcular o diâmetro mínimo da barra de modo a satisfazer as condições de segurança. Para que os objetivos da estrutura sejam atendidos, sua deformação longitudinal não poderá ultrapassar a 5 mm. São dados os valores da tensão admissível igual a 25 MPa e do módulo de elasticidade igual a 70 GPa.

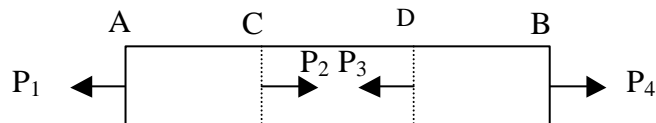
2.3.14) Uma barra de alumínio de diâmetro igual a 12 mm possui duas marcas distantes entre si de 250 mm. Sobre esta barra é aplicada uma tração de 6000 N,

resultando em um alongamento de 0,18 mm. Qual o módulo de elasticidade do alumínio usado na barra?

- 2.3.15) Considerar a barra de aço ABC da figura abaixo. À extremidade C é aplicada uma força axial de 66,7 kN. Determinar o diâmetro d da parte BC para o qual o deslocamento do ponto C seja de 1,3 mm. Sabe-se que a distância $L_{AB} = 1200$ mm, e que a distância $L_{BC} = 900$ mm. O diâmetro $d_{AB} = 30$ mm.



- 2.3.16) Calcular a deformação longitudinal da barra mostrada na figura abaixo incluindo carregamento e geometria, onde $P_1 = P_4 = 5000$ kN/m², $P_2 = P_3 = 2500$ kN/m², $L = 750$ mm, $AC = CD = DB = L/3$, $A = 0,0006$ m², e módulo de elasticidade $E = 2$ GPa.



3. APLICAÇÃO DA MECÂNICA DOS MATERIAIS NA GEODÉSIA

3.1. Determinação de parâmetros de deformação

3.1.1. Revisão conceitual

Conforme definido no Capítulo 2, tem-se o *estado de tensão* \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \frac{P}{A}, \quad (3.1)$$

e o *estado de deformação* \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \frac{d}{L} \quad (3.2)$$

Para definir o estado de deformação ϵ , se faz mão de parâmetros da deformação. Com o embasamento teórico posto no Capítulo 2, pode-se considerar que a deformação pode ser decomposta em:

(a) *cisalhamento puro*, que consiste na deformação pura (extensão simples sem alteração da área, só da forma); e,

(b) *ângulo de cisalhamento*, que consiste na parte rotacional, na qual ocorre a rotação .

Considere o corpo representado na Figura 3.1, sobre o qual são aplicadas cargas, resultando em uma compressão ao longo do eixo X, uma tração ao longo do eixo Y, bem como uma rotação em torno do eixo Z. Tração e compressão são aplicadas de modo que a relação entre as áreas A_{ABCD} e $A_{A'B'C'D'}$ seja dada como [Silva, 1986]:

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{A'B'C'D'}} = 1 \quad (3.3)$$

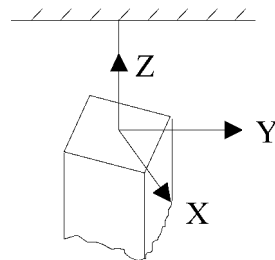


Figura 3.1 – Corpo sob cargas, dentro de um terno cartesiano.

A Figura 3.2 mostra o resultado da aplicação das cargas [Dave, 1984].

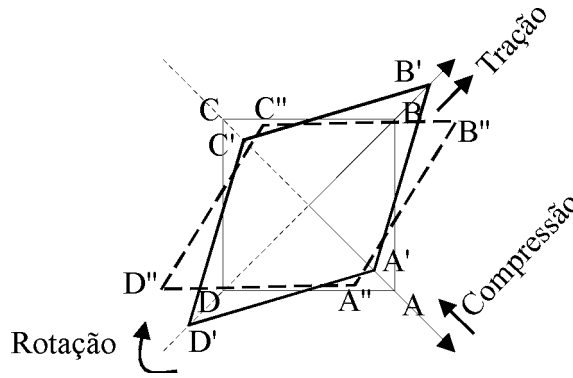


Figura 3.2 – Resultado da aplicação das cargas.

Todos os tipos de deformação podem ser descritos em termos de extensão simples e cisalhamento simples. Logo, tendo-se uma representação analítica para estes 2 parâmetros de deformação, pode-se definir analiticamente o cisalhamento puro e o ângulo de cisalhamento.

Considere um corpo k , definido em um sistema de coordenadas X, Y, Z e que sofre um processo de deformação infinitesimal e homogêneo, descrito pela Figura 3.3 [Silva, 1986]. Os deslocamentos sofridos pelas partículas do corpo k , resultando em k' , podem ser divididos em:

- (a) translação, ou seja, deslocamento do corpo rígido sem causar mudanças nas posições relativas das partículas que o compõem;
- (b) alteração das partículas relativas das partículas, logo $PQ \neq P'Q'$, $PR \neq P'R'$, $\theta \neq \theta'$.

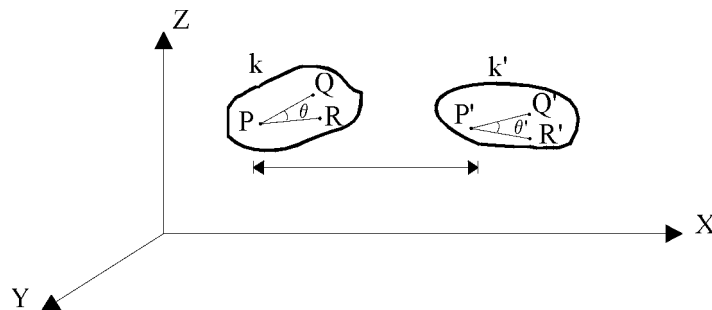


Figura 3.3 – Corpo sob deformação infinitesimal e homogênea.

Para a determinação do estado de deformação medem-se as alterações sofridas pelos comprimentos de segmentos de reta e pelos ângulos entre eles. Pode-se escolher três segmentos de reta mutuamente perpendiculares que se interceptem no ponto investigado, no estado anterior à deformação. Uma escolha genérica para o corpo k é apresentada na Figura 3.4 [Silva, 1986]. A avaliação das alterações destes três comprimentos e dos três ângulos retos que são subentendidos pelos segmentos de reta permite a definição do estado de deformação do corpo no ponto considerado.

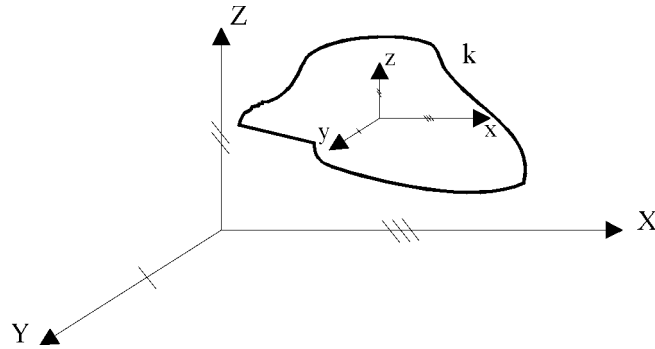


Figura 3.4 – Terno cartesiano dentro do corpo k.

A deformação específica (ver item 2.2.2) ao longo de cada um dos eixos coordenados, segue conforme visto no item 2.2.8, de forma análoga à equação (2.20):

$$\mathbf{e}_x = \frac{d_x}{L_x}, \mathbf{e}_y = \frac{d_y}{L_y}, \mathbf{e}_z = \frac{d_z}{L_z}. \quad (3.4)$$

O cisalhamento simples pode ser revisto a partir da Figura 3.5, e à luz dos itens 2.2.1 e 2.2.12. Os comprimentos originais do corpo, mostrados na Figura 3.5, correspondem aos segmentos GH, CG e CA, representando, respectivamente, a L_x , L_y e L_z , na notação utilizada. A deformação d_x , correspondente ao segmento HH'.

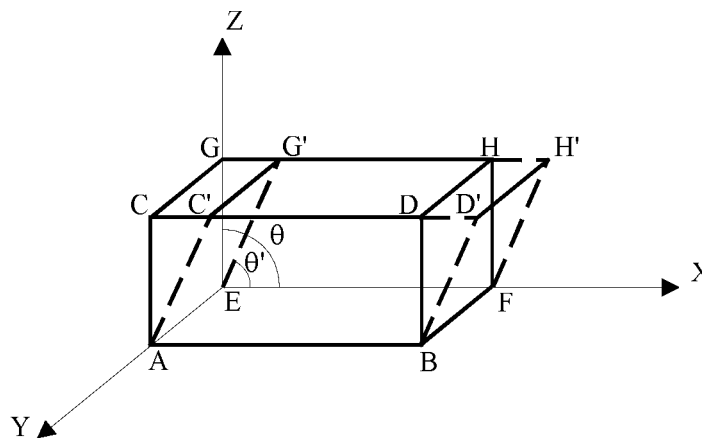


Figura 3.5 – Cisalhamento simples.

A Figura 3.5 mostra também que todas as seções planas foram deslocadas na direção do eixo X sem que existissem deslocamentos nas direções Y e Z. Como resultado, o ângulo $\theta = 90^\circ$ é deformado em um ângulo $\theta \neq 90^\circ$. O cisalhamento simples é medido pela tangente da diferença entre θ e θ' , como:

$$\mathbf{g}_{xz} = \frac{d_x}{L_z} = \tan (\theta - \theta'). \quad (3.5)$$

Como as deformações angulares são muito pequenas:

$$\mathbf{g}_{xz} = \tan(\theta - \theta') \approx (\theta - \theta') \quad (3.6)$$

Por procedimento análogo, pode-se obter \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{yz} . Por convenção:

$$\mathbf{g} > 0 \text{ quando } \theta' < 90^\circ ;$$

$$\mathbf{g} < 0 \text{ quando } \theta' > 90^\circ .$$

Logo os parâmetros \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yz} descrevem como se comportam os segmentos L_x , L_y e L_z dentro de um processo de deformação infinitesimal e homogêneo, nas vizinhanças de qualquer ponto objeto de análise. Deve-se alertar que um único conjunto de parâmetros não descreve, em geral, a deformação nos demais pontos do corpo.

3.1.2. Definição dos parâmetros de deformação a partir dos deslocamentos

Os parâmetros de deformação podem ser expressos como derivadas parciais de primeira ordem de uma função deslocamento. Considere-se a Figura 3.6. Nela, um corpo, dentro de um sistema de coordenadas bi-dimensional, sofre um deslocamento, representado pelos segmentos u e v , e uma distorção angular, representada pelos ângulos α e β . Um caso mais geral, tridimensional, pode ser considerado, usando-se a Figura 3.6 como uma particularização deste.

Os parâmetros que descrevem a geometria de deformação podem ser definidos a partir de três funções básicas $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$. Estas funções são contínuas e analíticas, e representam os deslocamentos sofridos pelos segmentos dx , dy e dz , respectivamente.

Para derivar as equações correspondentes, considere o elemento retangular ABCD no plano XY, dentro de um corpo elástico, conforme Figura 3.6 [Przemieniecki, 1968]. O elemento sofre uma deformação resultando no elemento A'B'C'D'. O elemento inicial sofreu duas deformações geométricas: alteração do comprimento e distorção angular. A alteração no comprimento AB é $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$. Aplicando-se a expressão da deformação específica, verifica-se que ela, na direção X, é igual a:

$$\mathbf{e}_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{\partial u}{\partial x} . \quad (3.7)$$

De forma análoga, pode-se mostrar que as deformações específicas nas direções Y e Z são:

$$\mathbf{e}_y = \frac{d_y}{L_y} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad (3.8)$$

e,

$$\mathbf{e}_z = \frac{d_z}{L_z} = \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (3.9)$$

respectivamente. A distorção angular pode ser determinada em termos dos ângulos \mathbf{a} e \mathbf{b} . Pode-se verificar que para pequenas deformações:

$$\mathbf{b} = \frac{\partial v}{\partial x} , \quad (3.10)$$

e,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (3.11)$$

Como a deformação de cisalhamento, no plano XY, é definida como a deformação angular máxima, isto é, como a soma dos ângulos \mathbf{a} e \mathbf{b} , conclui-se que:

$$\mathbf{g}_{xy} = \tan(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{g}_{xy} = \mathbf{g}_{yx} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} . \quad (3.13)$$

Os outros dois componentes de deformação de cisalhamento podem ser obtidos considerando-se a deformação angular nos planos XZ e YZ. Logo, por analogia:

$$\mathbf{g}_{xz} = \mathbf{g}_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} , \quad (3.14)$$

$$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{g}_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} . \quad (3.15)$$

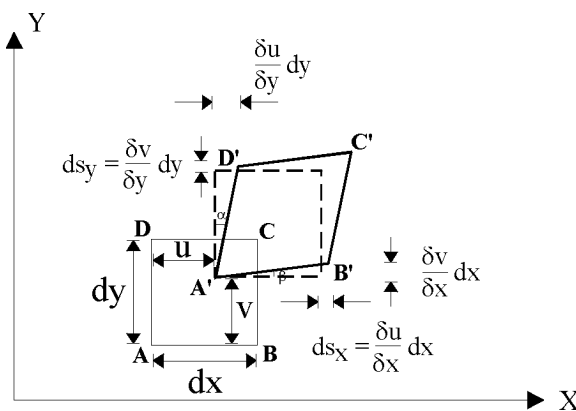


Figura 3.6 – Corpo sofrendo deslocamento e distorção angular. Observação: na figura onde se lê δ leia-se ∂ .

Pode-se organizar os elementos básicos das expressões dos parâmetros de deformação em forma da matriz $\underline{\mathbf{E}}$, é chamada de Tensor de Deformação (de Segunda ordem) [Vaníček & Krakiwisky, 1986]:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

A deformação pode ser decomposta analiticamente usando-se de uma propriedade dos tensores de segunda ordem que diz que todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto na soma de outros dois tensores, sendo um simétrico e outro anti-simétrico [Vaníček & Krakiwisky, 1986]. Para um caso bi-dimensional:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\omega}}, \quad (3.18)$$

nos quais:

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}), \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{w}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ji}). \quad (3.20)$$

A matriz $\underline{\underline{\epsilon}}$ é chamada de Tensor de Deformação Simétrica e responde pelo cisalhamento puro (deformação pura), ao passo que $\underline{\underline{\omega}}$ é o Tensor de Deformação Anti-Simétrica, representando analiticamente o ângulo de cisalhamento (rotação do corpo rígido).

3.1.3. Aplicação dos parâmetros de deformação em estruturas geodésicas

Para esta aplicação, adotam-se duas hipóteses simplificadoras [Silva, 1986]:

1º) Admite-se que o processo de deformação subentendido pelas estruturas geodésicas possa ser tratado segundo os preceitos que regem as teorias de deformação homogênea e

infinitesimal. Logo, considera-se a vizinhança de um vértice de uma rede geodésica como sendo definida pela região que encerra todos os vértices a ele conectados por observações, conforme ilustrado pela Figura 3.7 para o ponto T.

2º) A ordem de grandeza dos deslocamentos relativos de dois vértices vizinhos é pequena, em comparação com a distância que os separa.

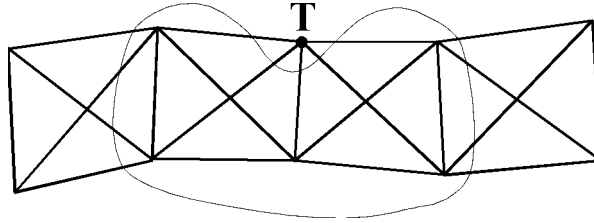


Figura 3.7 – Vizinhança do ponto T, dentro de uma estrutura geodésica.

A obtenção de informações sobre possíveis deformações na estrutura geodésica pode ser feita analisando-se os deslocamentos sofridos pelos vértices, em decorrência de um elemento inconsistente na estrutura. Estes deslocamentos podem ser detectados, por exemplo, comparando-se dois conjuntos de coordenadas oriundos de ajustamentos diferentes, ou em épocas distintas, ou se em um deles uma observação incompatível com as demais tivesse sido introduzida.

O problema ora colocado consiste na determinação das componentes do tensor de deformação, a partir da relação existente entre elas e os deslocamentos. Nesta relação, os parâmetros da deformação são expressos como derivadas parciais de primeira ordem da função deslocamento. Então, para a determinação das componentes do vetor deformação é necessário que a função deslocamento seja remodelada. Seja a função deslocamento definida como uma função vetorial por:

$$\vec{V}(u,v), \quad (3.21)$$

que ao ser projetada no eixo do sistema de coordenadas adotado tem como componentes:

$$u = u(x,y), \quad (3.22a)$$

e

$$v = v(x,y), \quad (3.22b)$$

considerando uma situação bidimensional. Estas funções podem ser desenvolvidas em um polinômio de primeira ordem do tipo:

$$u = u(x,y) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0), \quad (3.23a)$$

$$v = v(x,y) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(y-y_0), \quad (3.23b)$$

sendo que (x_0, y_0) representam as coordenadas do vértice analisado e (x, y) as coordenadas do vértice vizinho. As diferenças $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ indicam que o vértice analisado se constitui na origem de um sistema local de coordenadas. Os coeficientes a_1 , b_1 , a_2 e b_2 são considerados como aproximações das derivadas parciais da função deslocamento que integram o tensor de deformação, como:

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.24a)$$

$$a_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.24b)$$

$$b_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.24c)$$

$$b_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.24d)$$

e os coeficientes a_0 e b_0 como funções das coordenadas do ponto analisado:

$$a_0 = u(x_0, y_0) \quad (3.25a)$$

$$b_0 = v(x_0, y_0) \quad (3.25b)$$

A obtenção dos valores das componentes da função deslocamento em todos os vértices da estrutura pode ser feita pela comparação das suas respectivas coordenadas determinadas, por exemplo, por dois ajustamentos distintos, executados usando-se observações coletadas em duas épocas diferentes, ou, em um dos quais tenha sido inserida uma observação cuja consistência pretenda ser investigada. Deste modo, para os ajustamentos (1) e (2), tem-se que:

$$u = u(x, y) = x^{(2)} - x^{(1)} \quad (3.26a)$$

$$v = v(x, y) = y^{(2)} - y^{(1)} \quad (3.26b)$$

Para o cálculo de $(x - x_0)$ e de $(y - y_0)$ pode-se usar coordenadas oriundas do ajustamento (1) ou do ajustamento (2), por serem as diferenças entre elas muito pequenas [Thapa, 1980].

Para o cálculo dos parâmetros de deformação (incógnitas do mesmo problema), pode-se fazer uso das equações (3.23), para a vizinhança de cada vértice a ser analisado. Os valores da função deslocamento para os vértices vizinhos e para o vértice analisado podem ser calculadas pela equação (3.26). Considerando como n o número de vértices integrantes da vizinhança do ponto analisado, tem-se um conjunto de $2n$ equações a 4 incógnitas. Para a solução deste sistema de equações, exige-se um mínimo de 2 pontos vizinhos, de modo a se ter 4 equações para 4 incógnitas. Quando o número de pontos vizinhos for maior do que 2, pode-se partir para um processo de ajustamento usando-se, por exemplo, o critério dos mínimos quadrados [Gemaël, 1994]. Considerando os n vértices vizinhos ao ponto P, de coordenadas (x_0, y_0) , as equações (3.23) podem ser escritas como [Thapa, 1980; Schneider, 1982; Silva, 1986]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_1, y_1) = a_1(x_1 - x_0) + a_2(y_1 - y_0) + a_0 \\ v(x_1, y_1) = b_1(x_1 - x_0) + b_2(y_1 - y_0) + b_0 \\ \vdots \\ u(x_n, y_n) = a_1(x_n - x_0) + a_2(y_n - y_0) + a_0 \\ v(x_n, y_n) = b_1(x_n - x_0) + b_2(y_n - y_0) + b_0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Estas equações podem ser re-escritas da forma matricial, como:

$$\left| \begin{array}{l} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ \dots \\ u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n - x_0) & (y_n - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_n - x_0) & (y_n - y_0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_0 \\ b_0 \\ \dots \\ a_0 \\ b_0 \end{array} \right| \quad (3.28)$$

Ou, de forma mais elegante, como:

$$\underline{d} = \underline{A} \underline{e} + \underline{c}, \quad (3.29)$$

com dimensões \underline{d} (2n,1), \underline{A} (2n,4), \underline{e} (4,1) e \underline{c} (2n,1). A solução deste sistema de equações é dada por:

$$\underline{e} = -(\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{l}, \quad (3.30)$$

onde :

$$\underline{l} = \underline{c} - \underline{d}. \quad (3.31)$$

Os componentes do vetor \underline{e} são os elementos do tensor de deformação para o vértice sob investigação da estrutura geodésica.

Outras abordagens que conduzem a aplicação dos parâmetros de deformação em estruturas geodésicas podem ser desenvolvidas, como indicado por *Schafirin & Bock* [1994], *Freedon et al.* [1996] e *Quanwei* [1997].

3.1.4. Interpretação dos parâmetros da deformação

O significado dos parâmetros de deformação podem ser resumidos como segue: Os parâmetros que representam a deformação propriamente dita (normal ou de cisalhamento) indicam a variação média (no sentido do critério dos mínimos quadrados) da distância que separa o vértice em análise de seus vizinhos, retratando deste modo uma variação de escala. Já o parâmetro relacionado a rotação diferencial estará

retratando a variação média, em orientação, as direções para o vértice analisado, dentro do sistema de coordenadas adotado. Com este significado, torna-se possível a verificação da influência que uma determinada observação exerce sobre uma estrutura geodésica, em cada um de seus vértices, ou o quanto significa o deslocamento físico de algum vértice da estrutura [Vaníček *et al.*, 1981; Schneider, 1982; Silva, 1986; Vaníček *et al.*, 1996].

3.1.5. Representação gráfica dos parâmetros de deformação

A interpretação do significado dos parâmetros de deformação pode se dar através da respectiva representação visual. Para a representação da deformação simétrica, se faz uso de uma elipse, de forma análoga à elipse de erro formada a partir do resultado de um ajustamento por mínimos quadrados. Para a representação da rotação diferencial, se faz uso de arcos de circunferência [Vaníček *et al.*, 1981].

A elipse de deformação é definida a partir dos seus eixos principais de deformação, que possuem a direção dos autovetores do tensor de deformação simétrica. Os valores de seus semi-eixos maior e menor I_{MAX} e I_{MIN} (representando valores máximo e mínimo de deformação, respectivamente) são os autovalores do tensor em questão, que, no espaço bi-dimensional, é dado por [Schneider, 1982; Silva, 1986]:

$$I_{MIN} = 0,5 (e_{11} + e_{22}) - m \quad (3.32)$$

$$I_{MAX} = 0,5 (e_{11} + e_{22}) + m \quad (3.33)$$

onde,

$$m = [0,25 (e_{11} - e_{22})^2 + e_{12}^2]^{1/2} . \quad (3.34)$$

A orientação da elipse de deformação é dada pelo ângulo q , que orienta o seu semi-eixo maior, correspondendo ao autovalor máximo do tensor de deformação. Ela é dada por [Thapa, 1980]:

$$\tan q = - [(e_{11} - I_{MAX}) / e_{12}] \quad (3.35)$$

O tensor de deformação admite autovalores positivos e negativos, significando extensão e contração, respectivamente. Para efeito de representação gráfica, adota-se o módulo destas quantidades [Vaníček & Krakiwisky, 1986].

A rotação diferencial média é dada por:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.36)$$

Exercício 3.1

Após ajustamentos distintos de duas poligonais, realizadas em épocas diferentes, (1) e (2), detectou-se um deslocamento da estação O, situada sobre uma ponte. Calcular os valores máximo e mínimo de deformação, bem como a orientação da elipse de deformação. Dados as coordenadas UTM dos pontos 1, 2, O(1) e O(2):

Ponto	E (m)	N (m)
O(1)	673.950,000	7.187.550,000
O(2)	673.950,090	7.187.550,080
1	668.960,000	7.186.770,000
2	679.940,000	7.185.940,000

A solução deste exercício segue das equações (3.29), (3.30), (3.32), (3.33) e (3.34).

A matrix \underline{A} tem os seguintes elementos:

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} -4990 & -780 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4990 & -780 \\ 5990 & -1610 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5990 & -1610 \end{vmatrix}$$

O vetor \underline{d} é formado por elementos nulos. O vetor \underline{c} tem como elementos:

$$\underline{c} = [0,09 \ 0,08 \ 0,09 \ 0,08]^T$$

O vetor \underline{e} é obtido pela solução do sistema (3.30):

$$\underline{e} = [5,87 \ 0,78 \ 5,22 \ 0,69] \times 10^{-6} \text{ (ou } \underline{m} \text{-- ver item 2.2.2)}$$

Para o cálculo da elipse de deformação tem-se:

$$\lambda_{\text{MIN}} = 6,272$$

$$\lambda_{\text{MAX}} = 0,288$$

$$\theta = 56,5^\circ$$

3.2. Estado plano de tensões – análise das tensões e deformações

3.2.1. Abordagem da Mecânica dos Materiais

Conforme visto anteriormente, o estado mais geral de tensões, em um ponto qualquer situado na face de um cubo elementar, pode ser representado por seis componentes: σ_x , σ_y e σ_z representando as tensões normais; e, τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} representando as tensões de cisalhamento, todas agindo no mesmo cubo, centradas no ponto, dentro de um sistema de coordenadas.

Duas perguntas podem ser feitas:

- como se transformam as componentes das tensões quando ocorre uma rotação dos eixos coordenados?
- Qual a lei de transformação das componentes das deformações específicas?

O caso em questão se situa dentro do chamado “estado plano de tensões”, nos quais duas das faces do cubo elementar se encontram isentas de tensões. Este seria o caso de uma chapa fina, submetida a forças que atuam no plano médio da chapa. Supor, então, um ponto qualquer submetido a um estado plano de tensões (onde

$s_z = t_{zx} = t_{zy} = 0$) representado pelas respectivas componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} (conforme Figura 3.8).

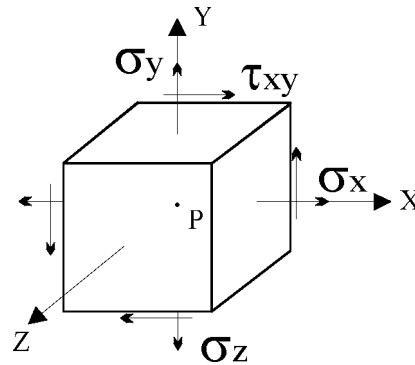


Figura 3.8 – Ponto sob um estado plano de tensão.

Deseja-se encontrar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ relativas as rotações deste cubo, em torno do eixo Z, em um ângulo θ .

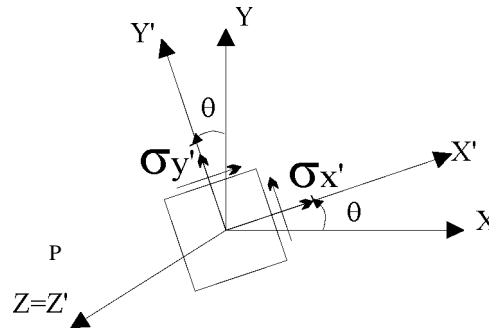


Figura 3.9 – Rotações centradas no ponto.

Após desenvolvimentos matemáticos apresentados, por exemplo, por *Beer & Johnston* [1989], tem-se que, para a componente $\sigma_{x'}$:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta; \quad (3.37)$$

para a componente $\sigma_{y'}$:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta; \quad (3.38)$$

e para a componente $\tau_{x'y'}$:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3.39)$$

Considerando as equações (3.38) e (3.39), verifica-se que:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (3.40)$$

Como $\sigma_z = \sigma_z' = 0$, pode-se concluir que a soma das tensões normais em um elemento submetido a um estado plano de tensões independe da orientação do mesmo.

As equações (3.37) e (3.38) são equações paramétricas de uma circunferência. Após manipulações algébricas [Beer & Johnston, 1989] encontram-se as expressões:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{med})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (3.41)$$

onde:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad (3.42)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.43)$$

A equação (3.41) é a expressão de uma circunferência de raio R com centro em um ponto C , com abscissa igual σ_{med} e ordenada igual a O , conforme mostra a figura 3.10.

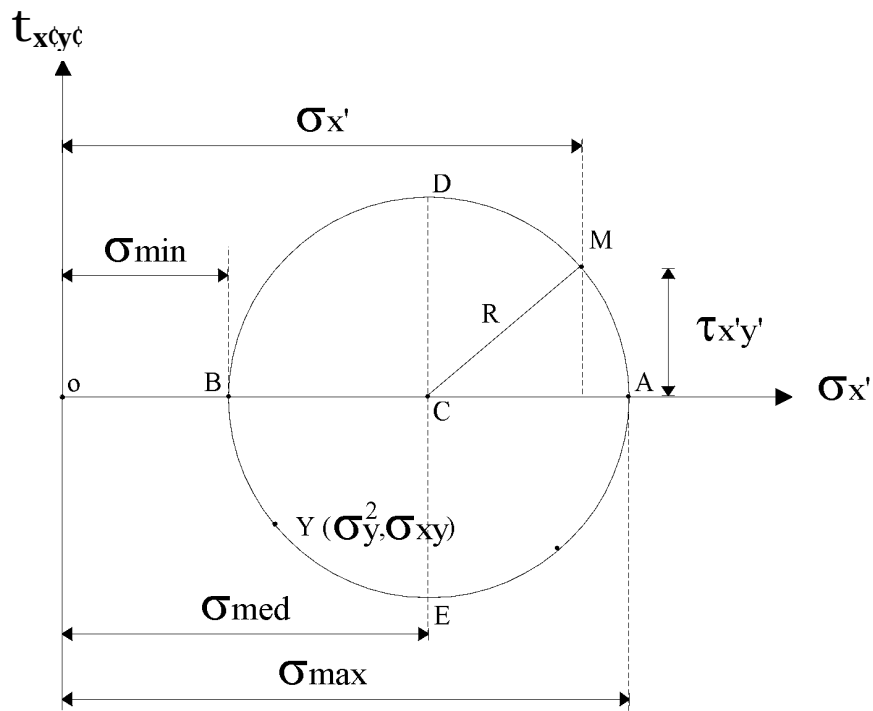


Figura 3.10 – Círculo de Mohr.

A Figura 3.10 é conhecida como Círculo de Mohr, e será motivo de atenção em breve. Desta figura, destacam-se:

- ponto A: máximo valor de tensão normal σ_x ;
- ponto B: mínimo valor de tensão normal σ_x ;
- ponto A e B: valor nulo da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$;
- pontos D e E: maior valor de tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$;
- pontos D e E: mesma abcissa σ_{med} ;
- raio R: equívale ao valor máximo da tensão de cisalhamento;
- ponto C: corresponde a σ_{med}

Uma equação para o ângulo θ pode ser obtida a partir da equação (3.39), considerando os pontos A e B, fazendo $\tau_{x'y'} = 0$:

$$\tan 2q_p = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} \quad (3.44)$$

As tensões normais $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ são chamadas de tensões principais no ponto considerado. As faces do cubo elementar são os planos principais. A equação (3.44) permite afirmar que não existem tensões de cisalhamento nos planos principais, pois $\tau_{x'y'}$ é igual a zero.

Da figura anterior, observa-se que:

$$\sigma_{máx} = \sigma_{med} + R, \quad (3.45)$$

e que:

$$\sigma_{mín} = \sigma_{med} - R \quad . \quad (3.46)$$

Por analogia aos pontos A e B, o valor do ângulo θ_c com respeito ao alinhamento D e E é:

$$\tan 2q_c = -\frac{s_x - s_y}{2t_{xy}} \quad (3.57)$$

Os ângulos q_p e q_c são inversos negativos, logo, separados por 45° . Deste modo, os planos de máxima tensão de cisalhamento formam ângulos de 45° com os planos principais.

Uma forma gráfica alternativa para problemas relacionados ao estado plano de tensões é conhecida como Círculo de Mohr. Esta solução gráfica foi sugerida por Otto Mohr (1835 – 1918) cujo formato é similar ao círculo mostrado na figura. Para a construção do círculo de Mohr, algumas convenções podem ser definidas de antemão:

- (a) Quando a tensão de cisalhamento provocar rotação do elemento no sentido horário, o ponto correspondente fica acima do eixo das abcissas; do contrário, o ponto fica abaixo.

- (b) Quando a tensão normal for positiva (tração), o ponto correspondente fica à direita do eixo τ ; do contrário, o ponto fica à esquerda.

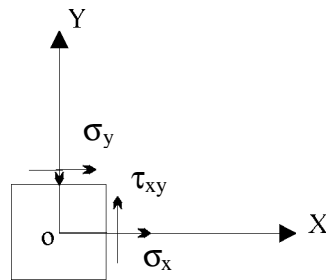
Exercício 3.2

A construção do círculo de Mohr é exemplificada abaixo. Considere um cubo elementar sujeito a um estado plano de tensões. Determinar as tensões máxima e mínima de cisalhamento e as tensões normais correspondentes através do círculo de Mohr. São dados:

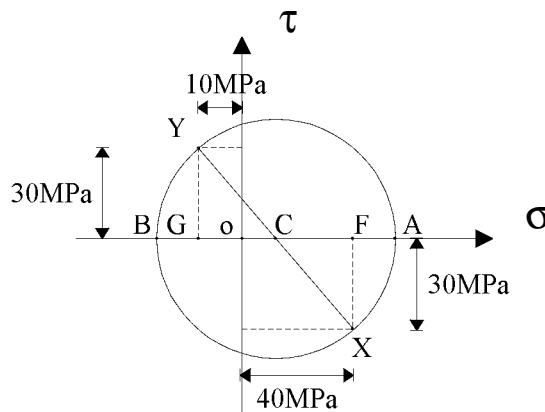
$$\sigma_x = 40\text{MPa}$$

$$\sigma_y = -10\text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = 30\text{MPa}$$



Inicialmente, deve-se marcar um ponto X, com coordenadas σ_x e τ_{xy} e Y, com coordenadas $-\sigma_y$ e τ_{xy} , respeitando as convenções definidas. A interseção da linha reta que une os pontos X e Y com eixos das abscissas define o ponto C, o centro do círculo de Mohr.



Conforme visto anteriormente, a abscissa do centro do círculo é igual ao σ_{med} :

$$\sigma_{med} = OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{40 + (-10)}{2} = \frac{30}{2} = 15\text{MPa}$$

O raio do círculo de Mohr segue diretamente da figura:

$$R = CX = \sqrt{CF^2 + FX^2}$$

onde $CF = 40 - 15 = 25\text{MPa}$ e $FX = 30\text{MPa}$.

$$\text{Logo: } R = CX = \sqrt{25^2 + 30^2} = 39,05\text{MPa}$$

As tensões principais são:

$$\sigma_{\text{máx}} = AO = \sigma_{\text{med}} + R = OC + EA = 15 + 39,05 = 54,05\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{min}} = OB = \sigma_{\text{med}} - R = OC - BC = 15 - 39,05 = -24,05\text{MPa}$$

O ângulo $2\theta_p$ corresponde ao ângulo ACX:

$$\tan 2q_p = \frac{FX}{CF} = \frac{30}{25}$$

$$2\theta_p = 50,2^\circ$$

$$\theta_p = 25,1^\circ$$

A tensão máxima de cisalhamento corresponde ao raio R, logo, igual a 39,05MPa. Comparando com a solução analítica:

$$\tan 2q_p = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} = \frac{2 \cdot 30}{40 - (-10)} = 50,2^\circ$$

$$\theta_p = 25,1^\circ$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{med}} + R$$

$$\sigma_{\text{min}} = \sigma_{\text{med}} - R$$

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{s_x + s_y}{2} = 15\text{MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2} = 39,05\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 54,05\text{MPa}$$

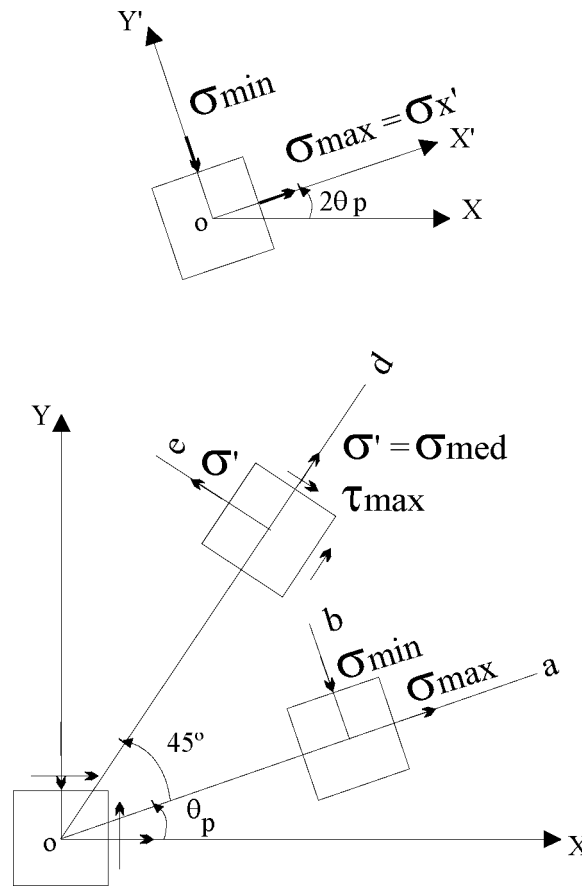
$$\sigma_{\text{min}} = -24,05\text{MPa}$$

A valorização da equação (3.37) mostra que a tensão normal σ_x' corresponde a tensão máxima:

$$s_x' = \frac{40 - 10}{2} + \frac{40 + 10}{2} \cos 50,2^\circ + 30 \sin 50,2^\circ = 54,05\text{MPa} = s_{\text{max}}$$

A tensão normal em cada face do cubo:

$$s' = s_{med} = 15 MPa$$



A notação θ_p faz com que $CA \equiv CD$. Uma rotação adicional de 45° faz com que o eixo $Oa \equiv Od$, o que corresponde a máxima tensão de cisalhamento.

3.2.2. Uso do Círculo de Mohr na análise de erros

Análise de erro é uma parte essencial de qualquer levantamento, pois nenhum levantamento é completo se não contiver uma verificação matemática sobre a ocorrência de algum tipo de erro. A análise de erro geralmente envolve um ajustamento dos dados coletados, resultando na determinação do valor mais provável (VMP) das posições dos pontos levantados. A precisão do posicionamento pode ser descrita pela magnitude de regiões de confiança em torno dos VMP. O ajustamento oferece informações usadas para determinar as dimensões de uma elipse de erro, centrada no VMP, associada a um nível de probabilidade (ou confiança) dentro da qual o ponto se situa. O círculo de Mohr pode ser utilizado como uma técnica alternativa para a análise de erro, incluindo informação sobre a direção da elipse de erro [Haug, 1984].

A determinação do VMP, através de um processo de ajustamento por mínimos quadrados pode se dar através da solução de um sistema de equações (normais), como correções a serem aplicadas a valores iniciais às coordenadas das posições (e às observações). Considerando o método paramétrico, a solução, contida no vetor \underline{X} , é expressa por [Gemael, 1994]:

$$\underline{X} = -(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} (\underline{A}^T \underline{P} \underline{L}), \quad (3.48)$$

onde \underline{A} é a matriz das derivadas parciais, \underline{P} representa a matriz dos pesos, e \underline{L} o vetor contendo as observações.

A determinação do VMP deve vir acompanhado de um indicador de precisão, obtido pelo 1º parêntese do lado direito da equação, representando a chummed matrix variância covariância. Para uma situação bi-dimensional, considerando um único ponto, ela pode ser expressa por [Gemael, 1994]:

$$\underline{\Sigma}_x = s_o^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s_{x^2} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{y^2} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Na matriz da equação (3.49) as variâncias ocupam a diagonal principal, e as covariâncias seus elementos não-diagonais, e o elemento σ_o^2 representa a variância *a priori*.

De posse da matriz variância-covariância, pode-se determinar o limite de probabilidade, sendo a elipse a figura matemática ideal para este propósito. A área dentro desta elipse é descrita como uma região de confiança dentro da qual existe uma probabilidade de que a posição certa esteja dentro da elipse. A Figura 3.11 mostra uma elipse de erros definidora da região de confiança, na qual o erro máximo e mínimo, obtido do ajustamento, jazem sobre os semi-eixos maior e menor, respectivamente, e cuja orientação se dá através do ângulo f .

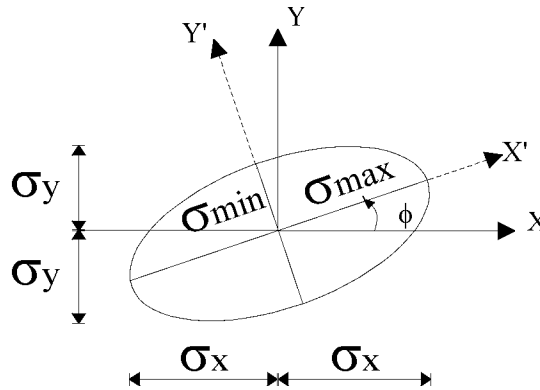


Figura 3.11 - Elipse dos erros

Estas quantidades definem a região (ou elipse) de confiança para um ponto(ou estação) isolada, como [Mephan & Niekerson, 1987]:

$$s_{\max} = \left\{ \frac{1}{2} \left[s_x^2 + s_y^2 + \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$s_{\min} = \left\{ \frac{1}{2} \left[s_x^2 + s_y^2 - \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.51)$$

$$f = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2s_{xy}}{s_x^2 - s_y^2} \right) \quad (3.52)$$

A aplicação do círculo de Mohr na análise de erro pode ser apresentada com o auxílio da Figura 3.12. Inicialmente, constrói-se um grid com variância e covariância definindo os eixos da abscissa e ordenadas, respectivamente. Considerando-se que a variância na direção X seja maior que na direção Y (neste caso), e que as coordenadas do ponto X sejam σ_x^2 e σ_{xy} , e do ponto Y sejam σ_y^2 e σ_{xy} , respectivamente, as variâncias e covariâncias, da posição ajustada, nas direções X e Y. A linha reta que une os pontos X e Y definem o diâmetro do círculo de Mohr para a estação. As variâncias principais, maiores e menores, são encontradas construindo-se um círculo contendo X e Y, com centro em C. A linha CX representa a direção X, e a linha CY a direção Y. O ângulo $2f$ é definido na interseção entre a direção X e a direção da variância máxima. O ângulo f é obtido pela união entre os pontos X e B [Haug, 1984].

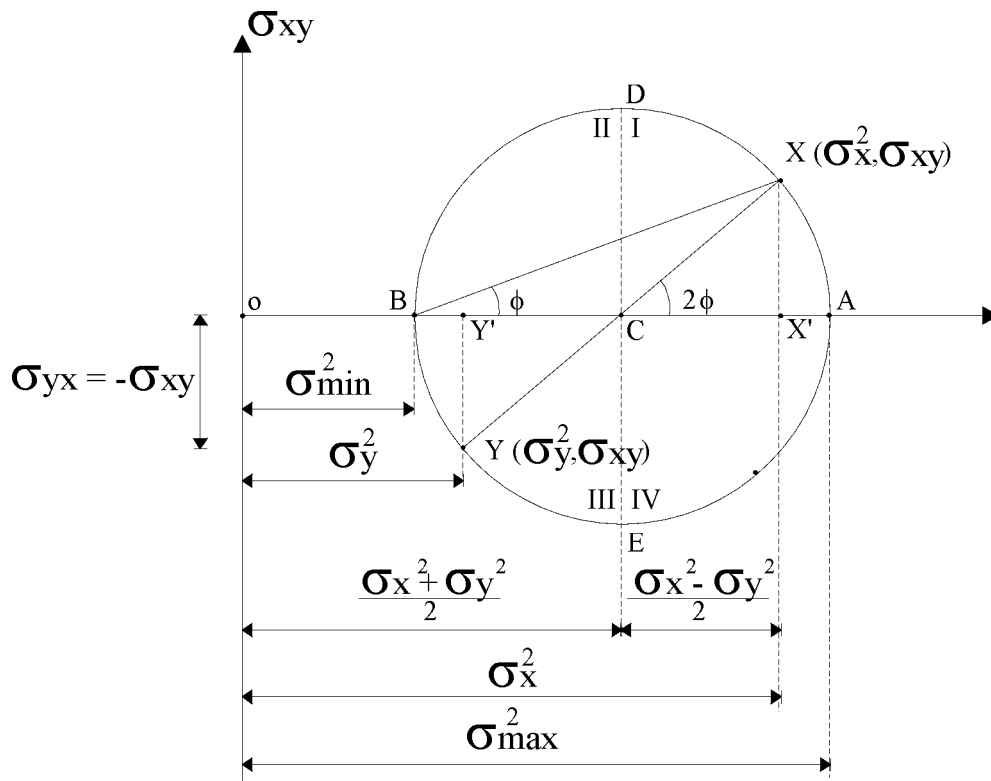


Figura 3.12 – Círculo de Mohr na análise dos erros.

Para se derivar as equações básicas, usam-se as Figura 3.12 e 3.13, onde se nota que:

$$OA = OC + CA = \sigma_{med} + R, \quad (3.53)$$

onde:

$$OC = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) \quad (3.54)$$

$$R = CA = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2)\right]^2 + \mathbf{s}_{xy}^2} \quad (3.55)$$

sendo que:

$$R^2 = (CX')^2 + (XX')^2 \quad (3.56)$$

$$R^2 = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2)\right]^2 + \mathbf{s}_{xy}^2 \quad (3.57)$$

e, OA equivale a variância máxima σ_{\max}^2 que obtém-se somando-se as equação (3.54) a (3.55):

$$\mathbf{s}_{\max}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2)\right]^2 + \mathbf{s}_{xy}^2} \quad (3.58)$$

De forma análoga:

$$\mathbf{s}_{\min}^2 = OB = OC - CB = OC - CA \quad (3.59)$$

$$\mathbf{s}_{\min}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2)\right]^2 + \mathbf{s}_{xy}^2} \quad (3.60)$$

A relação angular entre o eixo :

$$\tan 2f = \frac{xx'}{cx'} = \frac{\mathbf{s}_{xy}}{\frac{\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2}{2}} = \frac{2\mathbf{s}_{xy}}{\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2} \quad (3.61)$$

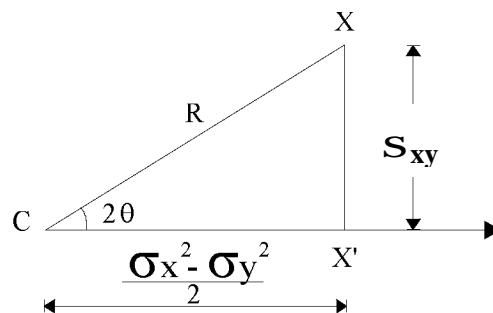


Figura 3.13 – Relações no triângulo CXX'

Pode-se verificar que as equações (3.58), (3.60) e (3.61) são idênticas às equações usadas para a construção da elipse de erros encontradas na literatura geodésica [Richardus, 1966; Bomford, 1980; Mephan & Nickerson, 1987]. Com isto, conclui-se que o Círculo de Mohr pode ser usado para a determinação das variâncias principais, máxima e mínima, bem como para orientação.

A determinação do quadrante da direção X no Círculo de Mohr pode ser feita de forma análoga aquela sugerida por Mikhail [1976] e utilizada por Haug [1984], relacionada ao ângulo entre o semi-eixo maior da elipse de erro e o eixo X. Para tal, considera-se a divisão do Círculo de Mohr em quadrantes, conforme indicado pelos números romanos na Figura 3.12. Os sinais das quantidades σ_{xy} e $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ definem esta direção, conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Definição do quadrante da direção X.

Valor	Sinal	Quadrante
$\frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}$	+	I
$\frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}$	-	II
$\frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}$	-	III
$\frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}$	+	IV

De forma análoga, a covariância máxima e mínima são iguais ao raio do Círculo de Mohr. A técnica do círculo de Mohr pode ainda ser estendida para a análise da variação do erro em direção [Haug, 1984] e para questões relacionadas a ponderação das observações [Kou & Song, 1996].

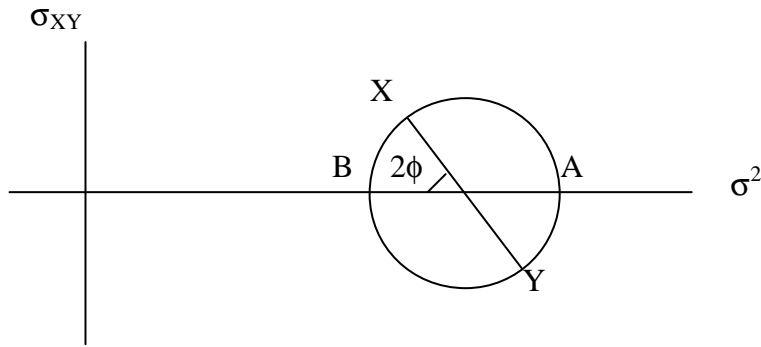
Exercício 3.3

Um levantamento foi efetuado, no qual os pontos A e B foram ocupados, objetivando a determinação do ponto C. As observações coletadas (ângulos e distâncias) foram ajustadas, e o VMP do ponto C obtido, associado à matrix variância-covariância:

$$\underline{\Sigma}_X = \begin{vmatrix} 4,650 & 0,200 \\ & 5,410 \end{vmatrix} \text{ mm}^2$$

Calcular graficamente, o valor das variâncias e covariâncias máximas e mínimas, bem como o ângulo de orientação, e comparar estes valores com os obtidos analiticamente.

Solução: primeiro, definir o quadrante da direção X. Como $\sigma_{xy} > 0$ e $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) < 0$, a direção X está no segundo quadrante.



Coordenadas de X e Y:

$$X(4,650; 0,200)$$

$$Y(5,410; -0,200)$$

O valor das variâncias máximas e mínimas corresponde aos pontos A e B, respectivamente. Graficamente, tem-se que:

$$\sigma_{\max}^2 = 5,45 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\min}^2 = 4,60 \text{ mm}^2$$

Atenção: para se obter este valor, o desenho do círculo de Mohr deve estar em escala!

O valor da covariância máxima e mínima corresponde ao raio do círculo de Mohr, que, graficamente, é igual a:

$$\tau_{XY} = R$$

Estes valores são equivalentes aos obtidos analiticamente com as equações (3.57), (3.58) e (3.60). Compare o valor analítico com os valores para σ_{\max}^2 , σ_{\min}^2 e τ_{XY} .

O ângulo de orientação da direção X é igual a -27° . Compare com o valor fornecido pela equação (3.61).

3.3. Pré-análise e otimização de redes geodésicas

3.3.1. Pré-análise e otimização

Entende-se por *otimização* de redes geodésicas um conjunto de procedimentos que conduzam a escolha *ótima*, no sentido de *ideal*, dentro de determinados critérios, do sistema de coordenadas que servirá como referência para a rede, da localização das estações que a compõem, das observações a serem utilizadas bem como de seus pesos associados, e da necessidade ou não de se melhorar uma rede pré-existente. Um processo de otimização envolve simulações, de natureza numérica ou não, conhecidas pelo nome de *pré-análise*. Às vezes, é possível que se encontre menção a otimização e pré-análise como sinônimos, o que pode causar certa confusão.

Dentro do contexto deste curso, é interessante ressaltar o significado das palavras precisão e acurácia. Os dois termos possuem significado estatístico. Precisão interna, ou simplesmente precisão, se refere ao quanto as observações se aproximam da sua média. Precisão externa, ou acurácia, se refere ao quanto a estimativa de uma grandeza se aproxima de seu valor exato. A precisão é expressa por meio da variância [Gemael, 1994]. Infelizmente, esta distinção entre precisão e acurácia é de certo modo tênue na comunidade de levantamentos. De fato, precisão e acurácia são sinônimos se as observações coletadas estiverem isentas de erros (o que é muito difícil na prática).

Existem três categorias de erros, conforme apontado por Gemael [1994]: erros sistemáticos, grosseiros e acidentais (ou aleatórios). Os erros sistemáticos possuem determinado padrão ou característica. O seu comportamento pode ser modelado matematicamente. Exemplo de erro sistemático, pode-se citar a refração que sofre o sinal transmitido por um medidor eletrônico de distância quando de sua propagação. Erros grosseiros são geralmente erros muito grandes, e atribuídos a erro do observador, ou a falha do equipamento. Por exemplo, um erro de leitura, ou um erro no registro da observação. Como estes erros não podem ser tratados matematicamente, eles devem ser detectados, através de procedimentos de medida ou de escrutínio das observações, previamente aos cálculos (pré-processamento). Já os erros aleatórios têm sua ocorrência sem que sejam regidos por alguma regra ou modelo matemático. Os erros aleatórios, contudo, possuem certas características que permitem que sejam minimizados através de processos de estimação, como o método dos mínimos quadrados, no estágio de pós-processamento.

A etapa de pré-análise requer, idealmente, o conhecimento a priori da acurácia das observações, de modo a que se possa inferir o quanto as observações, e, por conseguinte, os resultados finais, irão ser afetados por condições instrumentais e de ambiente. Uma análise posterior, possibilita que informações confiáveis sobre as variâncias e covariâncias, de todas as observações coletadas no levantamento, sejam usadas para a estimação dos parâmetros de interesse, bem como na avaliação da qualidade da rede.

O conceito de confiabilidade (*reliability*) de uma rede geodésica se refere a habilidade que a rede possui de resistir a erros (não detectados) nas observações. Em geral, distingue-se dois tipos de confiabilidade, a confiabilidade interna e a confiabilidade externa [Grafarend & Sansó, 1985]. A nível teórico, a aplicação do método dos mínimos quadrados requer que os dados a serem ajustados estejam isentos de erros de natureza sistemática e grosseira. Para este propósito, as observações devem passar por um processo de filtragem prévia, visando a eliminação destes erros. Os resultados do ajustamento são também passíveis de escrutínio em busca de erros. Contudo, por mais eficiente que possa ser a técnica de filtragem utilizada, erros, abaixo de um certo limite (ou tolerância) passam sem serem detectados. O conceito de confiabilidade interna está, então, ligado à capacidade de se detectar erros nas observações, ou quão efetiva determinada técnica de filtragem é ao ser aplicada à rede. O conceito de confiabilidade externa traduz a sensibilidade da rede em si, para os pequenos erros residuais que tenha permanecido, ou para pequenas alterações, ou inconsistências, nas observações. Uma rede confiável significa que ele responde pouco a erros não detectados.

3.3.2. Métodos para o monitoramento de deformações

Existem diferentes técnicas e metodologias que servem aos propósitos do monitoramento de deformações, incluindo aí a determinação dos parâmetros de

deformação. *Chen* [1983] sugere que medições com propósitos de monitoramento devem possuir as seguintes características:

- alta acurácia;
- repetibilidade na coleta das observações;
- integração entre diferentes tipos de observações;
- rede de monitoramento pode ser incompleta, dispersa em espaço ou em tempo;
- análise criteriosa dos dados coletados, baseada em métodos sofisticados, de modo a que se tenha a melhor interpretação possível, evitando-se, por exemplo, que erros de medição sejam considerados como deformações.

Dois categorias de métodos com objetivos de monitoramento de deformações podem ser apresentadas: os métodos geodésicos e os métodos não geodésicos. Os métodos geodésicos incluem métodos geodésicos terrestres e espaciais, bem como métodos fotogramétricos. Estes métodos são usados para o controle da magnitude e variação temporal das deformações horizontais e verticais de estruturas de parte mais superficial da crosta terrestre. Métodos geodésicos são complemente adequados para o monitoramento de deformações. Métodos não geodésicos fazem uso de instrumentos geotécnicos especializados. Eles se fazem necessários, na maioria das vezes, como forma complementar aos métodos geodésicos, por exemplo, indo àquelas partes das estruturas inacessíveis a estes, ou fornecendo outros tipos de informações [*Coleman & Ding*, 1993]. Métodos não geodésicos podem ser utilizados de forma principal, no monitoramento de deformações. Neste caso, métodos geodésicos entram no contexto para definir um sistema de referência.

Métodos geodésicos são utilizados através de redes de monitoramento dedicadas. *Chrzanowski* [1981] distingue dois tipos de redes, apresentadas na Figura 3.14(a) e (b):

- (a) redes relativas, nas quais os pontos que compõem a rede estão situados na região sob deformação. A deformação pode ser modelada através de medições repetidas temporalmente;
- (b) redes de referência, nas quais alguns dos pontos se situam fora da região sob deformação, permitindo a determinação dos deslocamentos absolutos dos pontos na área deformável.

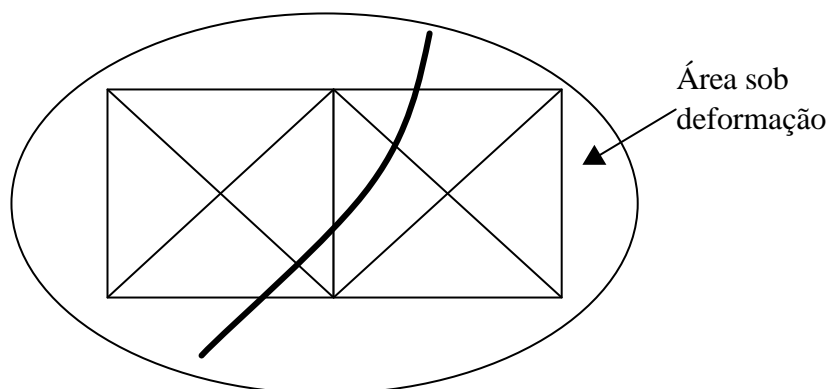


Figura 3.14(a) – Rede de monitoramento relativa.

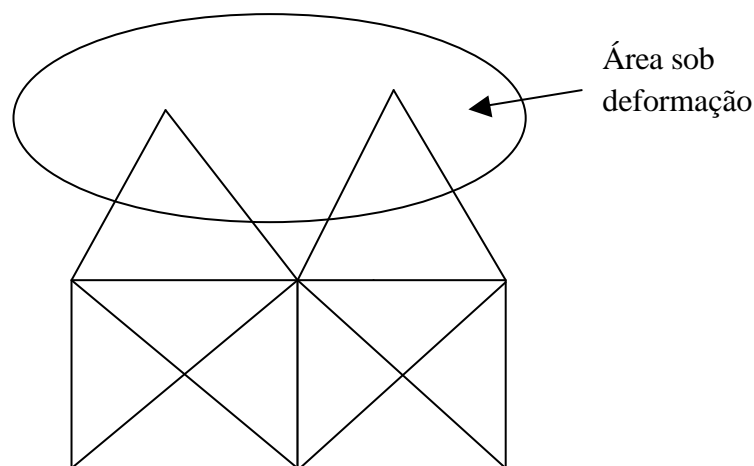


Figura 3.14(b) – Rede de monitoramento de referência.

A Tabela 3.2 mostra de forma resumida os métodos geodésicos usualmente utilizados no monitoramento de deformações, e respectivas acurácias associadas (Bomford, 1980; Vanícek *et al.*, 1980; Chrzanowski, 1983; Silva, 1983; Vanícek & Krakiwsky, 1986; Mendonça, 1986; Quintas, 1989; Groten & Becker, 1995; Kuang, 1996; Gag, 1997):

Tabela 3.2 – Métodos geodésicos de monitoramento de deformações.

Método	Acurácia
Nivelamento geométrico de 1 ^a ordem	0,5 mm $\sqrt{\text{km}}$
Distância com fita invar	2 ppm
Poligonação geodésica	1:30.000 a 1:150.000
Triangulação geodésica	1:30.000 a 1:1.000.000
Medição eletrônica de distância	0,1 ppm a 5 ppm
Nivelamento trigonométrico	2 mm $\sqrt{\text{km}}$
Técnicas Espaciais:	
GPS	1 ppm a 0,1 ppm
VLBI	0,01 ppm
SLR	0,01 ppm
Técnicas fotogramétricas	1:5.000 a 1:100.000

Explicação detalhada sobre cada um destes métodos é feita dentro do contexto das disciplinas correlatas a esta, durante o transcurso do curso. Porém algumas considerações importantes são feitas a seguir. Uma característica importante dos métodos geodésicos é a de que eles se limitam a áreas abertas, ou seja, é necessária intervisibilidade entre as estações sobre as quais as observações são realizadas, ou entre elas e os satélites, ou entre pontos objeto e as câmaras fotogramétricas. Como exemplo, pode-se mencionar a utilização do nivelamento geométrico de 1^a ordem no monitoramento de deslocamentos verticais da crosta provocados por carga decorrente do enchimento do reservatório de barragem. Conforme relatado por Gemael & Faggion [1995] a comparação entre desníveis obtidos de nivelamentos geométricos antes e após

o enchimento da barragem mostrou claramente o rebaixamento da crosta, tanto maior quanto maior a proximidade da barragem em si. O mesmo procedimento foi feito usando-se a gravimetria. Neste caso, contudo, somente o emprego de técnicas estatísticas [Monico, 1988; Jianjun, 1995] possibilitou a verificação de comportamento similar ao encontrado com o nivelamento geométrico [Gag, 1997]. Métodos geodésicos terrestres e espaciais têm sido utilizados em conjunto para o monitoramento de deformações [Wolfrum, 1992; Welsh, 1993; Dong et al., 1998].

Métodos não geodésicos fornecem informações relativas ao estado da deformação global dos objetos monitorados, bem como sobre translações e rotações com respeito a pontos de referência situados fora da área de deformação. Estas informações incluem deformações dentro do corpo em estudo, por exemplo, fundações, sejam no embasamento rochoso ou não, em grandes obras de engenharia, e movimentos relativos de estabilidade de solo ou rocha. Eles se aplicam primordialmente a deformações em escala local. Com respeito aos métodos geodésicos, os métodos não geodésicos possuem como vantagens, o fato de não requererem intervisibilidade entre as estações, bem como de se adaptarem para o controle contínuo e automático. Como desvantagens, pode-se citar o fato das medidas possuírem caráter local, podendo serem afetadas por distúrbios locais que não representam as verdadeiras deformações. Como as observações não são conectadas, uma análise de tendência geral da deformação é mais difícil.

A Tabela 3.3 relaciona alguns instrumentos empregados pelos métodos não geodésicos, os tipos de deformação a que eles são sensíveis e suas respectivas acurácias típicas (Chrzanowski, 1981; Chen, 1983; Secord, 1985; Secord, 1995; Kuang, 1996). Dos instrumentos citados alguns são tipicamente geotécnicos (inclinômetros e extensômetros), enquanto outros foram desenvolvidos para alguns tipos especiais de monitoramento (pêndulo invertido, níveis hidrostáticos, interferômetros a laser, alinhamento por difração).

3.3.3. Otimização de redes de monitoramento

O projeto, ou otimização, de redes geodésicas é dividido em ordens, a saber [Grafarend & Sansó, 1985]:

- Projeto de Ordem Zero: escolha de um sistema de referência ideal (ótimo).
- Projeto de Primeira Ordem: escolha da localização ideal (ótima) para as estações.
- Projeto de Segunda Ordem: escolha das observações que devem ser feitas e do seu respectivo nível de precisão.
- Projeto de Terceira Ordem: escolha de como melhorar uma rede pré existente.

A otimização de redes geodésicas pode ser feita através de vários métodos, encontrados na literatura. Pode-se citar aqueles baseados em simulações numéricas baseadas em computador com saída gráfica [Janes et al., 1986; Chang et al., 1996], na solução por inversas generalizadas [Bossler et al., 1973], por programação linear [Cross & Thapa, 1979; Evan-Tzur & Papo, 1996], por programação quadrática e por inversas generalizadas iterativas [Grafarend & Sansó, 1985]. Uma nova abordagem foi proposta por Kuang [1991].

Tabela 3.3 – Métodos não geodésicos de monitoramento de deformações.

Instrumentos	Acurácia típica	Deformação
Inclinômetro de precisão: Inclinômetro de mercúrio Nível eletrônico Talyvel	0,0002" 0,25" 0,5"	Inclinações
Nivelamento hidrostático: Elwaag 001 Sistema Nivomatic Pêndulo suspenso e invertido	0,03 mm/40 m 0,1 mm/25 m 0,1 mm	
Extensômetros (fio ou fita): Distômetro ISETH Distinvar CERN <i>Rock spy</i> Extensômetros (tubo ou vara): Pontos isolados Pontos múltiplos Torpedo Interferômetro à laser	0,05 mm 0,05 mm 0,02 – 0,2 mm 0,01 – 0,02 mm 0,01 – 0,02 mm 0,1 mm 0,0004 ppm	Extensões e deformações
Alinhamento, métodos mecânicos: Linha de aço Linha de nylon Alinhamento ótico Alinhamento com laser	0,1 mm 0,035 mm – 0,07 mm 1 – 10 ppm 0,1 – 1 ppm	Alinhamentos

A otimização de redes de monitoramento seguem os mesmo princípios gerais, porém com algumas diferenças, algumas profundas, enunciadas a seguir [Kuang, 1996]:

1. Não existe problema de projeto de ordem zero nas redes de monitoramento. No caso das redes de referência, os deslocamentos são determinados a partir da comparação entre coordenadas determinadas em épocas distintas, com respeito ao mesmo datum, definido na época inicial, e cujo movimento nas épocas subsequentes deve ser identificado. Deste modo, neste caso, o problema consiste em se confirmar a estabilidade da rede de referência. Apenas aquela que mantém a mesma posição e orientação com respeito a época inicial deve ser considerada. Já no caso das redes relativas, os parâmetros de deformação são independentes do datum.
2. Com respeito ao projeto de primeira ordem, a forma da rede de monitoramento será, obviamente, função da topografia do local ou da forma da estrutura a ser monitorada. Contudo, sempre é possível que alguns dos pontos que compõem a rede possam ter suas localizações alteradas, melhorando a configuração da rede, seguindo algum critério de otimização. Nas redes de referência, pontos de controle devem se situar fora da área sob deformação, ao passo que os pontos objeto de estudo devem estar distribuídos dentro da área sujeita à deformação. Tendo em vista que os parâmetros de interesse são as variações das coordenadas (deslocamentos) com o tempo, bem como outros parâmetros de deformação, todas as outras observações isoladas (isto é, aquelas de natureza não geodésica) que não pertençam à rede geodésica devem ser integradas de modo a se obter um rede de monitoramento otimamente projetada. Portanto, no projeto de primeira ordem para redes de

- monitoramento, a escolha da posição ótima para os instrumentos geodésicos ou não deve ser resolvida de forma simultânea.
3. O problema relacionado ao projeto de segunda ordem para as redes de monitoramento consiste em se encontrar as acurácias das observáveis, geodésicas ou não, isto é, da matriz peso, que conduzam à determinação dos parâmetros o mais perto possível do ideal para o propósitos do monitoramento. A solução do projeto de segunda ordem possibilita a escolha dos procedimentos de medição e observação.
 4. A questão do projeto de terceira ordem está ligado à melhoria de um rede de monitoramento existente. Ele pode existir, por exemplo, quando as acurácias associadas aos deslocamentos ou parâmetros de deformação não sejam satisfatórias, ou quando a análise das deformações mostrar uma tendência incompatível com a realidade. Nestes casos, a rede de monitoramento deve ser estendida por pontos ou observações adicionais.

3.3.4. Estudo de caso: otimização de uma rede GPS

Um exemplo de natureza prática, atual, e de aplicação direta na atividade profissional do Engenheiro Cartógrafo, é o da otimização de uma rede GPS. O problema da otimização de redes GPS pode ser considerado como análogo ao problema clássico da otimização de redes terrestres geodésicas, comparando-se o conjunto de estações no terreno e no céu (os satélites), no caso de uma rede GPS, aos pontos de uma rede. O problema fica então dimensionado como um problema clássico, com algumas características particulares [Delikaraoglou & Lahaye, 1989]:

- Projeto de ordem zero, ou otimização da definição de *datum*: este é um problema complexo, cuja definição se dá pelo conjunto de estações rastreadoras usadas para a geração das efemérides.
- Projeto de primeira ordem ou otimização da configuração da rede: neste caso, inclui-se problemas relacionados a redundância, configuração e logística. A questão da redundância passa pela definição de uma configuração mínima que permita que o número de observações seja igual ou maior que o número de parâmetros incógnitos. A questão da configuração está ligada à geometria formada entre os pontos terrestres e os satélites. E, finalmente, a logística, interessada na minimização dos custos relativos a ocupação dos pontos da rede com o número de receptores disponíveis.
- projeto de segunda ordem, ou definição dos pesos das observações: no caso do GPS, as observações são de alta qualidade (erros aleatórios de pequena magnitude). Porém, elas são afetadas por erros sistemáticos, tais como erros dos relógios dos satélites e do receptor, atrasos ionosféricos e troposféricos, e resolução das ambigüidades. Estes erros devem ser apropriadamente modelados ou eliminados, sendo esta uma preocupação adicional do projeto de segunda ordem. Outros problemas inerentes são, a seleção da observável a ser utilizada (fase da portadora ou pseudo-distância), seleção do ângulo de elevação (para redução do atraso troposférico), duração da sessão de observação (em geral, quanto mais longa a sessão, mais precisos são os resultados), seleção do período do dia para a coleta das observações (para redução do atraso ionosférico).
- projeto de terceira ordem, ou melhoria da rede existente, com a integração de observações terrestres.

De forma geral, pode-se dizer que a qualidade de uma rede GPS depende dos seguintes fatores :

- a) da geometria da configuração dos satélites e das estações que compõem a rede no terreno;
- b) da precisão das observações de pseudo-distância e de fase de batimento da portadora;
- c) do número total das linhas de base e sua distribuição.

Em termos práticos, deve-se ter em mente que a configuração dos satélites no espaço é algo que não se tem controle, pois ela segue a definição feita quando da concepção do Sistema, ou de alterações determinadas pelo Sistema de Controle. O máximo que se pode fazer com respeito a ela, consiste na escolha dos satélites a serem rastreados, da duração da sessão de observação e da hora do dia da realização do rastreamento. A geometria das estações que compõem a rede no terreno, é, em geral, definida em função da aplicação, a exemplo do que foi dito com respeito às redes de monitoramento, baseadas em observações terrestres. A precisão das observações GPS é uma função do tipo de receptor utilizado. Assim sendo, a única decisão a ser tomada com liberdade diz respeito a escolha do número total de linhas de base a serem medidas, bem como a sua distribuição. Esta escolha pode reduzir ou aumentar a redundância geométrica, permitindo-se atingir a precisão exigida pela aplicação, a um custo mínimo.

A otimização de uma rede GPS pode ser, então, colocada como o problema de se achar, de forma ótima, o subconjunto de linhas de base que irão satisfazer os critérios de precisão e custo, sendo dados o conjunto de estações, a relação de todas as linhas de base possíveis de serem medidas e o critério de qualidade para as coordenadas estimadas. Duas abordagens para o problema podem ser feitas dependendo do programa de processamento utilizado. Programas genericamente chamados de “científicos”, tais como o Bernese [Rothacher *et al.*, 1993], o Gipsy [Weeb & Zumberge, 1993] e o Dipop [Santos, 1995], têm capacidade para o ajustamento de redes GPS com o emprego direto das observações coletadas. A abordagem mais próxima da prática profissional, é de primeiro determinar as linhas de base individualmente, e, posteriormente, partir para um ajustamento da rede formada por estas linhas de base. A determinação individual das linhas de base pode ser feita por alguns dos vários programas “comerciais”, tais como o Prism, da Ashtech, o Trimvec, da Trimble, e o Ski, da Leica.

Deve-se ressaltar que as linhas de base a serem utilizadas no ajustamento são aquelas ditas como linearmente independentes. Por exemplo, se três pontos forem ocupados por três receptores, simultaneamente, irão existir duas linhas de bases linearmente independentes. A terceira será uma combinação linear das outras duas, logo, dependente. Neste caso, esta terceira base deve ser descartada no ajustamento da rede. O emprego de linhas de base linearmente dependentes aumenta artificialmente a precisão, podendo igualmente afetar as coordenadas estimadas [Santos *et al.*, 1987].

A otimização se dá a partir do modelo paramétrico para o ajustamento das coordenadas de uma rede \underline{X} , e sua matriz variância covariância associada \underline{S}_X :

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{L} \quad (3.62)$$

$$\underline{S}_X = \sigma_0^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \quad (3.63)$$

onde \underline{P} é a matriz peso:

$$\underline{P} = \sigma_0^{-2} \underline{S}_L^{-1} \quad , \quad (3.64)$$

\mathbf{s}_0^2 é a variância a priori, e $\underline{\mathbf{S}}_L$ a matriz variância covariância das soluções individuais da cada uma das linhas de base, determinadas no estágio anterior. Igualmente deste primeiro estágio, advém o vetor $\underline{\mathbf{L}}$, composto pela diferença de coordenadas entre os pontos que compõem a rede. Por exemplo, entre os pontos A e B, o vetor $\underline{\mathbf{L}}$ é:

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \quad (3.65)$$

A equação (3.63) é empregada, na prática, para os propósitos de pré-análise.

O problema colocado está relacionado a se encontrar um meio termo entre custo e precisão. Considerando uma rede GPS composta por m estações. O número total de n linhas de base que podem ser formadas é dado por:

$$n = \frac{m(m-1)}{2} \quad (3.66)$$

Imaginando-se uma rede GPS em uma região metropolitana, composta por, 10 estações, existirão 45 linhas de base para serem observadas. Obviamente, esta ocupação possui um custo associado. O ideal é ocupar apenas as linhas de base necessárias para se alcançar a precisão especificada.

Considere-se o seguinte exemplo de uma pequena rede composta por 4 vértices. Neste caso, existirão 6 linhas de base. Pode-se, então, usar uma abordagem iterativa, determinando-se a matriz variância-covariância $\underline{\mathbf{S}}_X$ para cada uma das várias combinações entre as linhas de base. A matriz dos pesos $\underline{\mathbf{P}}$ deve ser composta usando-se de informação da precisão do método utilizado. A matriz $\underline{\mathbf{A}}$ representa a geometria da rede. Por exemplo, considerando-se as 6 linhas de base, e uma situação bidimensional, na qual o ponto A é um ponto injuncionado na rede, matriz $\underline{\mathbf{A}}$ é formada a partir de:

$$\underline{\mathbf{DX}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}}, \quad (3.67)$$

ou, explicitamente:

$$\begin{vmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ X_C - X_A \\ Y_C - Y_A \\ X_D - X_A \\ Y_D - Y_A \\ X_C - X_B \\ Y_C - Y_B \\ X_D - X_B \\ Y_D - Y_B \\ X_D - X_C \\ Y_D - Y_C \\ X_A \\ Y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \\ X_D \\ Y_D \end{vmatrix} \quad (3.68)$$

A configuração final da rede será aquela que contiver o menor número de linhas de base cuja matriz \underline{S}_X satisfaça a precisão especificada.

3.4. Exercícios propostos

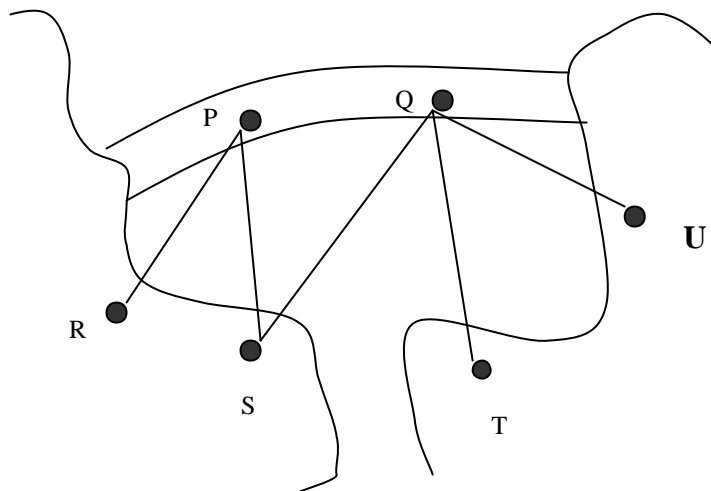
3.4.1) Uma rede de triangulação foi estabelecida ao redor de uma barragem, visando o monitoramento de deformações sofridas por ela ao longo do tempo, através da determinação das coordenadas de pontos distribuídos pela estrutura da barragem. Para tal, pode-se proceder ao estudo individual, ou conjunto, destes últimos pontos, através de suas respectivas coordenadas, oriundas de soluções espaçadas temporalmente. Abaixo é fornecida uma listagem de coordenadas contendo dois pontos na barragem, ponto P e Q, e quatro pontos da rede de triangulação, vértices R, S, T e U, oriunda de duas soluções distintas no ano de 1997 e 1998. Calcular, no ponto P, os valores máximo e mínimo da deformação, e o azimute do semi-eixo maior da elipse de deformação. Traçar a elipse de deformação deste mesmo ponto. Para a solução deste exercício, baseie-se no croquis de localização abaixo. Repare que este croquis foi feito sem levar em consideração escala e orientação.

Ponto P:	$E_{1997} = 467.440,000$	$N_{1997} = 8.382.222,000$
	$E_{1998} = 467.440,100$	$N_{1998} = 8.382.222,200$
Ponto Q:	$E_{1997} = 467.460,000$	$N_{1997} = 8.382.242,000$
	$E_{1998} = 467.460,100$	$N_{1998} = 8.382.242,200$
Ponto R:	$E = 458.345,000$	$N = 8.370.150,000$
Ponto S:	$E = 468.050,000$	$N = 8.368.768,000$
Ponto T:	$E = 468.120,000$	$N = 8.369.001,000$
Ponto U:	$E = 480.432,000$	$N = 8.371.090,000$

Para a solução deste problema é dado a solução da inversão de uma matriz:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{vmatrix} 0.1943 & -0.0604 & 0 & 0 \\ -0.0604 & 0.0494 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1943 & -0.0604 \\ 0 & 0 & -0.0604 & 0.0494 \end{vmatrix} \times 1.0e-007$$

Todos os passos da solução devem ser escritos.



3.4.2) Responda as seguintes perguntas, de forma clara e objetiva.

- Defina o que é uma “estrutura geodésica”?
- Quais os propósitos principais da aplicação dos conceitos na Mecânica dos Materiais na Geodésia?
- No que consiste a chamada “pré-análise”?
- Como se chama a deformação angular de uma estrutura?
- Dentro do contexto da disciplina, como você define a palavra “deformação”?
- Considerando que um ponto, dentro de um sistema cartesiano X e Y , sofre um deslocamento com componentes u e v , respectivamente paralelas aos eixos X e Y . O que representam as derivadas parciais $\partial u / \partial x$ e $\partial v / \partial y$?
- As derivadas parciais apresentadas no item anterior podem ser agrupados em forma matricial, onde elas se posicionam na diagonal principal. No nosso estudo, como se chama tal agrupamento?
- Considere a matriz variância-covariância Σ_X abaixo, para um caso genérico bidimensional. O que representam seus elementos?

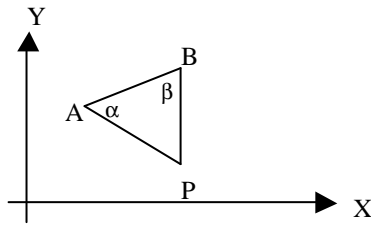
$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_X^2 & \mathbf{s}_{XY} \\ \mathbf{s}_{YX} & \mathbf{s}_Y^2 \end{bmatrix}$$

- Que figura matemática é utilizada para representar um limite de confiança a partir da matriz variância-covariância? O que a área deste figura descreve?
- Ao se aplicar a técnica do círculo de Mohr na análise de erros, que quantidades são usadas como unidade dos eixos das ordenadas e das abscissas?
- Considere uma rede de monitoramento composta por 10 vértices. Qual o número máximo de linhas de base que podem ser formadas nesta rede?
- Observações, com propósitos de monitoramento, devem possuir *alta acurácia*. No contexto da disciplina, o que isto significa?
- Qual a diferença entre uma *rede relativa* e uma *rede de referência*, dentro do contexto do monitoramento de deformações?
- Cite três métodos geodésicos que atendam os propósitos de controle de deformações.
- O sistema abaixo é utilizado com finalidades de pré-análise. O que cada um de seus termos significa?

$$\underline{\mathbf{S}}_X = \mathbf{s}_0^2 (\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{A}})^{-1}$$

3.4.3) Considere a situação dada pela Figura abaixo. Ela apresenta três pontos A, B e P, dentro de um sistema cartesiano bidimensional X, Y . Estes pontos estão ligados por uma observação de distância d (entre B e P) e por duas observações angulares (ângulos \mathbf{a} , entre APB, e \mathbf{b} , entre BPA). Sabe-se que ocorreu um erro na medição da distância d : o valor medido é maior do que o valor real. Contudo, este erro não alterou a direção do alinhamento BP, que permanece paralelo a direção do eixo Y . Avalie a situação e responda:

- Como se comportam numericamente as derivadas parciais $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$, $\partial u / \partial y$ e $\partial v / \partial x$ (são valores nulos ou não nulos)? E as correspondentes a tensão de cisalhamento?
- Neste caso, qual seria a representação aproximada da elipse de deformação (faça um croquis)?

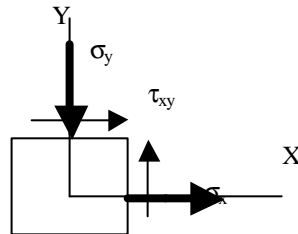


3.4.4) Seja dada a seguinte situação de um cubo elementar sujeito a um estado plano de tensões. Determinar as tensões principais, as tensões máxima e mínima de cisalhamento e as tensões normais correspondentes, através do círculo de Mohr (solução gráfica). Mostrar todos os passos. São dados:

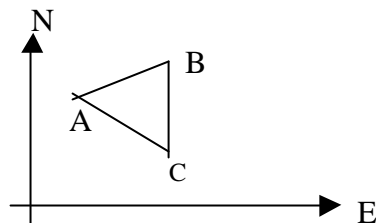
$$\sigma_x = + 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = - 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = + 40 \text{ Mpa}$$



3.4.5) Considere a situação dada pela Figura abaixo. Ela apresenta três pontos A, B e C, dentro de um sistema cartesiano bidimensional E, N . Estes pontos formam um rede com propósitos de monitoramento de deformações. O ponto A é um ponto fixo. Cada uma das 3 linhas de base foi ocupada independentemente por receptores GPS. Do mesmo modo, elas foram processadas de forma independente. Para o ajustamento deste rede, como se compõe a matriz dos coeficientes \underline{A} ? Mostre como ela se compõe.

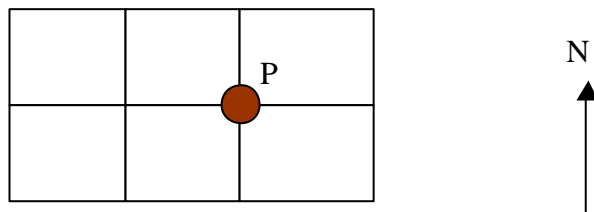


3.4.6) Um levantamento foi efetuado, no qual dois pontos A e B foram ocupados, objetivando a determinação de um ponto C. As observações coletadas (ângulos e distâncias) foram ajustadas, e o valor mais provável do ponto C foi obtido, associado à matriz variância covariância (valores em mm^2):

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} 5,310 & 0,500 \\ 0,500 & 6,290 \end{bmatrix}$$

Calcular graficamente o valor das variâncias e covariâncias máximas e mínimas, bem como o ângulo de orientação da direção X.

- 3.4.7) Considere a estrutura geodésica indicada pela figura abaixo. Deseja-se determinar os parâmetros de deformação para o ponto P. Construa a matriz dos coeficientes \underline{A} para o caso em questão. A solução deverá ser literal.



- 3.4.8) O que caracteriza os projetos de ordem zero, primeira ordem, segunda ordem e terceira ordem, no tocante a otimização de redes geodésicas?
- 3.4.9) Considere o sistema de equações abaixo, dentro do contexto de uma rede de monitoramento. O que representam cada um dos elementos do sistema indicado? Como se constitui a matriz dos coeficientes \underline{A} ?

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{L}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beer, F.P. & E.R. Johnston Jr. Resistência dos Materiais, 2ª Edição, MacGraw-Hill Ltda, São Paulo, 1989.
- Bomford, G. Geodesy, 4th Edition, Oxford University Press, New York, 1980.
- Bossler, J., E. Grafarend & R. Kelm. Optimal design of geodetic nets, Journal of Geophysical Research, Vol. 78, No. 26, 1973, 5887-5897 pp.
- Chang, Y.-M. , C.-H. Chen & C.-S. Chen Optimal observation design of surveying network using artificial neural network, Geomatics Research Australasia, No.64, June, 1996, pp 10-16.
- Chen, Y. Q. Analysis of deformation surveys, a generalized method, Ph.D. Dissertation, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 94, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1983.
- Chrzanowski, A. A comparison of different approaches into the analysis of deformation measurements, Proceedings of the XVI International Congress of the Federation of Surveyors, Montreaux, August 9-18, 1981.
- Chrzanowski, A. Economization of vertical control surveys in hilly areas by using modified trigonometric levelling, 1983 Convention of the American Congress of Surveying and Mapping, Washington, DC, March, 1983.
- Coleman, R. & X. Ding Combined adjustment of geodetic and non-geodetic data: applications in high-precision engineering surveying, Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying, No.59, December, 1993, pp. 19-38.
- Cross, P. & K. Thapa The optimal design of levelling networks, Survey Review, Vol. 25, No. 192, 1979, pp 68-79.
- Dave, D. J. Matrix and finite element displacement analysis of structures, Oxford University Press, New York, 1984.
- Delikaraoglou, D & F. Lahaye Optimization of GPS theory, techniques and operational systems: progress and prospects, Global Positioning System: an overview, IAG Symposium No. 102, Y. Bock & N. Leppard (Eds.), Edinburgh, Escócia, 1989, pp.218-239.
- Dong, D., T. A. Herring & R.W. King Estimating regional deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data, Journal of Geodesy, Vol.72, No.4, 1998, pp. 200-214.
- Evan-Tzur, G. & H.B. Papo Optimisation of GPS networks by linear programming, Survey Review, Vol.33, No.262, 1996, pp. 537-545.

- Freeden, W., E. Groten, M. Schreiner, W. Sohne & M. Tucks Deformation analysis using navier spline interpolation (with an application to the Lake Blasjo area), Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Vol. 103, No. 3, 1996, pp. 120-146.
- Gag, G. Auscultação gravimétrica na região da barragem Bento Munhoz da Rocha, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1997.
- Gemael, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas, Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1994.
- Gemael, C. & P. L. Faggion Auscultação geodésica na região da Hidrelétrica de Segredo (II), Resumos Expandidos do Quarto Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Vol. I, 20-24 de agosto, Rio de Janeiro, RJ, 1995, pp. 139-141.
- Grafarend, E. W. & F. Sansó. (Eds.) Optimization and design of geodetic networks, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- Groten, E. & M. Becker Methods and experiences of high precision gravimetry as a tool for crustal movement detection, Journal of Geodynamics, Vol.19, No.2, 1995, pp. 141-157.
- Janes, H., K. Doucet, B. Roy, D. E. Wells, R. B. Langley, P. Vanícek & M. R. Craymer GPSNET: a program for the interactive design of geodetic networks, Geodetic Survey of Canada CR 86-003, Ottawa, Ont. Canada, 1986.
- Jianjun, Z. Bayesian hypothesis test for deformation analysis, Geomatica, Vol. 49, No. 3, 1995, pp. 283-288.
- Haug, M. D. Application of Mohr's circle technique in error analysis, Surveying and Mapping, Vol. 44, No. 4, 1984, pp. 309-321.
- Kou, X & J. Song Error Mohr circle and invariants of cofactor coefficient, Journal of Surveying Engineering, Vol. 122, No. 4, 1996, pp. 158-167.
- Kuang, S. Optimization and design of deformation monitoring schemes, Ph. D. Dissertation, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 157, University of New Brunswick, Fredericton, N.B., Canada, 1991.
- Kuang, E. P. Geodetic Network Analysis and Optimal Design: concepts and application, Ann Arbor Press Inc., Michigan, USA, 1996.
- Mendonça, F. J. B. Monitoração de estruturas de concreto com fotogrametria à curta distância, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1994.
- Mephram M. P. & B. G. Nickerson Preanalysis, Papers for the CISM Adjustment and Analysis Seminars, 2nd Edition, The Canadian Institute of Surveying and Mapping, Ottawa, Canada, 1987, pp. 150-181.

- Mikhail, E. M. Observations and Least Squares, University Press of America, Massachusetts, EUA, 1976.
- Monico, J. F. G. Ajustamento e análise estatística de observações na detecção de deformações, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1988.
- Popov, E. P. Mechanics of Materials, 2nd Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey, EUA, 1976.
- Przemieniecki, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- Quanwei, L. The time dependent models of horizontal crustal movement, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Vol. 104, No. 4, 1997, pp 142-146.
- Quintas, M. C. L. Métodos geodésicos aplicados na determinação de movimentos e deformações crustais, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1989.
- Richardus. P. Project surveying, 2nd. Edition, A. A. Balkema, Rotterdam, 1984.
- Rothacher, M., G. Beutler, W. Gurtner, T. Schildnecht & U. Wild Bernese GPS Software Version 3.4, Printing Office, Universidade de Berna, Berna, Suíça, 1993.
- Santos, M. C. NAVSTAR/GPS: aspectos teóricos e aplicações geofísicas, Dissertação de Mestrado, Publicação Especial N. 7, Departamento de Geofísica, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, RJ, 1990.
- Santos, M. C. Real-time orbit improvement for GPS satellites, Ph.D. Dissertation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 178, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1995.
- Santos, M. C., P. Vanícek & R. B. Langley Effect of mathematical correlation on GPS network computation, Journal of Surveying Engineering, Vol. 123, No. 3, 1997, pp. 101-112.
- Schneider, D. Complex crustal strain approximation, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 117, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1982, 221 pp.
- Secord, J. Implementation of a generalized method for the analysis of deformation surveys, M. Sc. Thesis, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 117, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1985.
- Secord, J. Development of the automatic data management and the analysis of integrated deformation measurements, Ph. D. Dissertation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 176, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1995.

- Silva, A. S. Controle de estruturas de engenharia pelo método fotogramétrico, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1983.
- Silva, M. C. D. Aplicação da Mecânica dos Corpos Deformáveis à Análise de consistência de observações em redes geodésicas horizontais, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1986.
- Schaffrin, B. & Y. Bock Geodetic deformation analysis based on robust inverse theory, Manuscripta Geodaetica, Vol. 19, No. 1, 1994, pp. 31-44.
- Thapa, K. Strain as a diagnostic tool to identify inconsistent observations and constraints in horizontal geodetic networks, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 68, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1980, 160 pp.
- Vanícek, P., R. O. Castle & E. I. Balazs Geodetic leveling and its applications, Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 18, No. 2, 1980, pp. 505-524.
- Vanícek, P., K. Thapa & D. Schneider. The use of strain to identify incompatible observations and constraints in horizontal geodetic networks, Manuscripta Geodaetica, Vol. 6, 1981, 257-281 pp.
- Vanícek P. & E. J. Krakiwsky, Geodesy, the concepts, 2nd Edition, North Holland, New York, 1986.
- Vanícek, P., P. Ong, E. J. Krakiwsky & M. R. Craymer. Application of robustness analysis to large geodetic networks, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 180, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1996.
- Weeb, F. H. & J. F. Zumberge (Eds.) An introduction top GIPSY/OASIS II precision software for the analysis of data from the Global Positioning System, Jet Propulsion Laboratory Document D-11088, julho, EUA, 1993.
- Welsch, W.M. A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of terrestrial and satellite network observations, Manuscripta Geodaetica, Vol.18, No.5, 1993, pp.295-305.
- Wolfrum, O. Merging terrestrial and satellite networks by a ten-parameter transformation model, Manuscripta Geodaetica, Vol.17, No.4, 1992, pp.210-214.

ANEXO A**Prefixos para as potências de 10**

MAGNITUDE	PREFIXO	SÍMBOLO
10^{-18}	ATO	a
10^{-15}	FEMTO	f
10^{-12}	PICO	p
10^{-9}	NANO	n
10^{-6}	MICRO	μ
10^{-3}	MILI	m
10^{-2}	CENTI	c
10^{-1}	DECI	d
$10^0=1$	UNIDADE FUNDAMENTAL	
10	DECA	D
10^2	HECTO	H
10^3	KILO	K
10^6	MEGA	M
10^9	GIGA	G
10^{12}	TERA	T